In hoc opere contenta.
Arithmetica decem libris demonstrata
Musica libris demonstrata quattuor
Epitome i libros arithmeticos diui Seuerini Boetij
Rithmimachie ludus q̄ ⁊ pugna nūeroꝝ appellaꝝ

G. Gonterius Cabilonensis: in
laudē Arithmetices ⁊ Musices.

Tempore iam multo docte latuere sorores:
Quas retinet comites flaua minerua suas.
Nūc placide terras post tempora multa reuisunt.
Grata quoqꝫ ante alias Gallica terra placet.
His olim celebris fuit omnis Achaica tellus.
Pythagora patriam diffugiente samon.
Hellada nunc linquunt: et doctas palladis vrbes.
Sequaniosqꝫ petunt/parhisiosqꝫ lares.
Hec venit omnimoda numerorum cincta caterua.
Atqꝫ docet numeris quicquid in orbe situm est.
Altera dulcisono cantu/fidibusqꝫ canoris
Edomuisse viros traditur atqꝫ feras:
Que sua Pierijs tenet vnica nomina musis
Qꝫ nichil hac musis gratius esse solet.
Attamen artificem stapule misere marine:
Qui leta hoc studijs fronte dicaret opus.
Hoc solum studium atqꝫ hec illi cura: iuuaret/
Irritus et ne sit dispereatqꝫ labor.

Noua cōmentatio in Jordanū per Jacobum fabrū stapulēsem laborata ad clarissimum virum Joannem de Ganay presidentem parisiensem.

P Aucis me digne āmonuisti Clarissime vir: quot cognita cōmoditates adducat disciplinarum parens arithmetica/ quasq; ignota relinquat tenebras. vt quē nullius discipline fugiat studium. In primis enī legum autoritas (in quibus potissimū tua versatur opera) tibi numeris egere visa est. vt q̄ iusticiā vnicuiq; p dignitate dispēsat: nunc Arithmetica/ nūc vo Geometrica rōne cōstantē. que agros/ agrorū limites/ aquar diuergia/ alluuionesq; et plerasq; sitia sollicite cōsiderat q̄ Mathematico destituta p̄sidio nunq; plane assequi valeat. Hinc imperatores romani Vespasian⁹/ Adrianus/ Traian⁹/ Theodosius/ Archadi⁹/ Honorius/ Constātinus et aliorū cōplurimi legūtur peritos agrimēsores instituisse: qui podismorum rōem ad publicam vtilitatē tenerent quā numeror p̄ficit sagacitas. Hic Lucius Moderatus illarū rex studiosus insignem libellū reliquit. Et Arithmetica cōtēplatio rite cognita facilem p̄bet musicarū modulationū intelligentiā astronomicarūq; subtilitatū ingressus. et prisca Theologia numeris olim vt quibusdā ad diuina gradibus tota innitebatur: quius et nūc in sacris literis sua retulcāt mysteria nūeri. Tolle igitur numeros/ numerorūq; disciplinā: leges inpficis. iusticia ceca relinquitur. nulla modulationū reperietur regla. nullus celestiū cōtemplationū aditus. sacrar litterarū delitebūt mysteria: imo et vniuersa philosophia q̄ pariter humanor/ diuinorūq; cognitio describitur. Quequidē cōmoditates assecute discipline/ atq; incōmoda neglecte p̄scos minime latuere: vt q̄ haud alio tramite crediderint q̄ p eā incedētes nos posse q̄cq; digna satis cōtēplatiōe cognoscē. Pythagoras enī sine nūeror p̄sidio nichil posse sciri cōcedebat. et Plato in sue academie vestibulo hoc insculpsit epigrāma. Nemo huc mathematice expers introeat. qui i toto ferme Timeo de natura rer p numeros disputat: et in octauo et nono reipublice multa de hac re dissenit. que Theon smirneus mathematicus ob rei arduitatem intacta reliquit. Quapropt non ab re volebas hāc numerosam hui⁹ almi parisien studij philosophātū turbā et bonar litterar cupidā: tā necessaria semita/ tum ad diuina assurgēdi tum descēdēdi ad hūana esse destitutam. Accipe ergo nūc benefactor vnice decem Arithmetice discipline Jordani clarissimi viri libellos noua cōmentatiōis luce nris laboribus illustratos/ tuoq; nomini dicatos qui cōmoditates enumeratas scieti afferre valebūt sufficiētissime. Et si iubes opus tuis auspicijs absolutum iam migret ad ceteros. vt vel sic intelligant omnes prescitum tibi se gratias habituros per quem fuerint hanc litterariam facultatem assecuti. Vale felicissime.

Argumentum decem librorum Jordani.

Primus passiones numeror cōmunes: suar partium/ et quātū ex diuisi numeri partibus fiat discutit.

Secundus est de proportionum et proportionalitatum cōmunibus passionibus.

Tertius de numero primo/ composito/ ad alterum primo/ et numeris in aliqua proportione minimis.

Quartus de numeris continue proportionalibus/ cōmensurabilibus et incōmensurabilibus.

Quintus de additione/ subtractione/ et partitione proportionum.

Sextus de numeris quadratis/ cubicis/ superficialibus similibus/ et solidis.

Septimus de numero pari/ impari/ pariter pari/ pariter ipari/ impariter pari/ perfectis/ abūdantibus/ et diminutis.

Octauus de formis numerorum: trigonis/ tetragonis/ pentagonis/ hexagonis/ heptagonis/ octogonis/ pyramidibus/ serratilibus/ et tesseris.

Nonus de equalitate/ inequalitate/ multiplicibus/ superparticularibus/ et superpartientibus

Decimus de medietate Arithmetica/ Geometrica/ Musica: et de medietatibus minus principalibus.

¶ Jordani Nemorarij Clarissimi viri Elementa Arithmetica: cū dēmōstratiōibus Jacobi Fabri Stapulensis: ad Joannē de Ganay Senatorē Parisiensem.

v Vnitas est rei per se discretio. Numerus est quātitas discretorum collectiua. Naturalis series numerorum dicitur in qua sm vnitatis adiectionem fit ipsoꝝ computatio. Differētia numerorum appellat̄ illud quo maior super minorem abūdat. Numeri ab aliis equidistare dicūtur: cum ipsoꝝ ad illos equales sunt differentie. Numerus per alium multiplicatur: qui toties coacervatur sibi: quoties in multiplicāte est vnitas. et qui ex multiplicatione concrescit: productus nominatur. Numerus alium numerare dicitur: qui sm aliquem multiplicatus illum producit. Pars est numerus: numeri minor maioris: cum minor maiorem numerat. et qui numeratur: numerātis multiplex appellatur. Denominans est numerus: sm quem sumitur pars in suo toto. Similes dicūtur partes: que ab eodem numero denominantur. Numerus sm quem alius diuiditur: diuisor nominatur. partes vero in quas distribuitur: diuidēda appellantur. Prima et simpla nūeri pars: est vnitas. quādo duo numeri partem habuerint cōem: quoties eadem pars fuerit in minore: tot partes maioris dicetur esse minor et tote partes quoties ea cōmunis pars fuerit in maiore. ¶ Dignitates.

1 o Omnis numeri pars: est minor suo toto.
2 o Omnis minor est: que maiorem habet denominationem
3 Quicunqꝫ equalium siue eiusdem eque multiplices fuerint: ipsi quoqꝫ erunt equales.
4 Quibus idem nūerus eque multiplex fuerit: siue quoꝝ multiplices eq̄les fuerint: ipsi etiam sunt equales
5 Omnis numeri pars est vnitas: ab ipso denominata.
6 Quilibet numerus totus est ab vnitate: quota pars ipsius est vnitas.
7 Si vnitas in aliquem numerum ducatur: siue idem in vnitatem: seipsum producit.
8 Extremorum differentia ex differentiis eorūdem ad medium est composita.
9 Si numerus numerum superet: differentia minori addita: aut a maiore sublata: numeri relinquuntur equales
10 Qui eidem equantur: inter se sunt equales.
11 Et si ab equalibus equales aut idem cōmunis demat̄ur: relinquūtur equales.
12 Et si ab equalibus dempti sint inequales: relinquentur inequales.
13 Si duo maiores simul addātur pariter et duo minores simul: maiorum compositum composito minorum maius existit.
14 Si equales equalibus addas: toti quoqꝫ fient equales.
15 Et si inequales equalibus: toti erunt inequales.
16 Partes simul: suo toti equantur.
17 Quorūcunqꝫ ad eundem numerum proportio est vna: ipsi inter se sunt equales.
18 Quoties numerus a numero substrahi potest: toties in eodem numerabilis est
19 Proportiones que ex equalibus constant ꝓportionibus: inter se sunt equales.
20 Quoꝝ dimidia sunt equalia: et toti sunt equales. ¶ Petitiones.

1 Vtlibet numero: quotlibet posse sumi equales.
2 c Quolibet numero: aliquem q̄tūlibet esse maiorem.
3 Seriem numerorum in infinitum posse extendi.
4 Nullum numerum in infinitum decrescere.
5 Maius non numerare minus
6 Si numerum datum numerus multiplicet: idqꝫ ꝓductum diuidat: numerū datum redire. et contra si aliq̄d numerus datum numerum diuidat: et quod prouenit rursum multiplicet: in idem numerum datum redire.

¶ Dignitates atqꝫ petitiones paucas vt disciplina se faciliorē vbiqꝫ prestet/ adiecimus: quas passim necessarias tanq̄ omnibus notas autor suppressit.



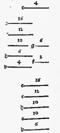
❡Omnis numerus minor maioris aut pars est aut partes. 1

❡Sint a/b/c/d quotlibet numeri. a maior et b cd minores. dico b esse partem aut partes a. et c et d similiter. Nam aut minor numerat maiorem ut d numerat a. et tunc d per diffinitionem est pars a. aut minor non numerat maiorem quemadmodum b non numerat a. sed est alius eos communiter numerans qui sit e. et tunc quoties e fuerit in b minore: tot partes b minor per ultimam diffinitionem erit a maioris. quod si minor non numerat maiorem ut c non numerat a. neque numerus communis eos numerat: tum per quintam conceptionem cuiuslibet numeri unitas sit pars ab ipso denominata: per ultimam diffinitionem idem efficitur. constat igitur omnem minorem maioris esse partem aut partes.



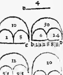
❡Omnis numerus circum se positorum et equaliter ab eo distantium est medietas. Quod si eorundem fuerit medietas: illos ab eo equidistare conveniet. 2

❡Sit a quicunque numerus: et b et c circumpositi et ab eo equidistantes. b maior: et c minor. et sit d differentia communis eidem b ad a: et a ad c. sitque e numerus compositus ex b et c. dico a esse medietatem e. et si a sit medietas e: dico b et c circumpositos equidistare ab a. Primum autem sic ostenditur. nam quantum a superat c: tantum b superat a. dempta ergo d communi differentia ab b: per secundam partem none dignitatis residuum b equatur a. sed et eadem differentia d addita c quod sit f per primam partem eiusdem dignitatis equatur a. ergo per decimum quinquam residuum b et f que eidem numero a equantur: inter se equabuntur. sed residuum b et d et c simul per decimamsextam dignitatem equantur e. igitur et residuum b et f que equantur residuo b et d et c simul etiam equantur e. et residuum b et f monstrata sunt equalia. igitur f est medietas e sed f monstratus est equari a: igitur a medietas este. quod est primum. et in omnibus aliis consimili agatur argumento. Secundum autem sic probatur. sit a medietas numerorum b et c simul iunctorum. si b e non equidistant a numero a: eorum differentie ad a per diffinitionem non sunt equales. sit igitur d differentia a ad c illorum numerorum minimum addo d ad a: et compositus sit g. quia igitur a ad c differentia est d et eadem differentia est g ad a igitur per diffinitionem g et c equidistant numero a. quia ergo g et c equidistant a per immediate monstratum a ipsorum simul iunctorum est medietas. sed et a ponitur medietas b et c simul iunctorum. per tertiam igitur conceptionem b c simul: et g c simul eidem numero a eque multiplices adinuicem sunt equales. ab utroque igitur dempto communi numero c per undecimam communem scientiam residui b et g adinuicem sunt equales. que igitur differentia g ad a: eadem erit b ad a. quare equidistabunt b et c ab numero a. quod est contra hypothesim et propositum.



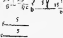
❡Si duo numeri a duobus numeris circum se positis equaliter distent: illis coniuncti erunt equales. Quod si eis equales fuerint: ab ipsis equidistare necesse est. 3

❡Eadem que in precedenti demonstratio est. Sint igitur a et b inter c et d equidistantes: c maximus et d minimus et f differentia communis: itaque e propositus ex c et d et differentia e ad a sit g. dico numeros a b simul iunctos equales esse c d simul iunctis. et contra si c d simul iuncti sunt equales a b simul iunctis: a b equidistantes esse c d. Primum patet: nam cum d differentia sit c ad e. Est enim d numerus quo superat e numerum c. ex differentia extremorum e a constabit ex d f differentiis scilicet extremorum ad medium e. Est enim ut ostensum est d differentia e ad c et f differentia e ad a per hypothesim: cum posita sit f communis differentia e ad a et b ad d. at quia b constat ex eisdem: quod patet nam cum f sit differentia b ad d: ea siquidem differentia f addita minori numero d per nonam conceptionem reddit b. est itaque b equalis g. quare constabit ex a b: cum per eandem conceptionem constituatur e ex a et g sua quidem differentia ad a: que equatur ipsi b. Sunt igitur a b iuncti et c d iuncti eidem tertio e equales: adinuicem equales. quod est primum. Rursum dico si c d simul equantur a b simul: etiam a b equidistare c d. Nam capio h qui equidistet ad c quantum b ad d: qui h b quia sic equidistabunt: per immediate monstratum h b simul equantur c d. sed et a b ponuntur eidem c d simul iunctis equari. quare h b et a b eidem tertio equales: adinuicem equabuntur. Substracto igitur ab utroque communi b: remanent per communem sciam h et a adinuicem equales. ergo equalis differentia a ad c et b ad d. quare per diffinitionem adinuicem equidistabunt. quod est secundum atque totum propositum.



❡Si fuerit primus secundi quota pars tertius quarti: erunt primus et tertius tota pars secundi et quarti: quota primus secundi. 4

❡Sit a primus numerus: b secundus: c tertius: et d quartus. quia a tota pars est ipsius b: quota pars c est ipsius d: intelligo b et d in similes illas partes divisos. et quia prima unius cum prima alterius est tanquam a c: et similiter secunda cum secundo. et hec coniunctio toties fieri potest quoties primus in secundo. toties igitur numerus equalis a c primo et tertio: sumi potest in b d secundo et quarto: quoties a in b. quare a c simul primus et tertius per diffinitionem erunt similis et tota pars secundi et quarti quota primus secundi. quod est propositum.



❡Si fuerit primus tote partes secundi quote tertius quarti: erunt primus et tertius tote partes secundi et quarti: quote primus secundi. 5

❡Sit ut prius primus numerus a: secundus b: tertius c: et quartus d. sitque a partes b sumpte secundum e et denominate in b secundum f. sitque g una illarum partium a: et h una partium c. cum igitur g primus tota pars sit b secundi quota h tertius est d quarti: per premissam compositum ex g et h primo et tertio tota pars erit b d secundi et quarti: atque denominata secundum f. at partes a et c sumuntur secundum e: erunt igitur partes a et c ad b d sumpte secundum e: et denominate secundum f. quare et similes et quote partes fuerit a in b. quod est propositum.

❡Si fuerint quotlibet numeri totidem aliis eque multiplices: erit quoque compositus ex eis composito ex illis eque multiplex. 6

¶ Sint a.b.c.d.e.f quotlibet numeri: sintq; d e f cū multiplices a b c singula singuli: intelligo itaq; a primum. d scdm. b tertium. e quartum: eritq; per penultimam compositus ex a b pmo ⁊ tertio tota pars compositi ex d e scdo ⁊ quarto quota pars a est d. quare compositus ex d e eque multiplex ad compositum ex a b vt d ad a. Facio itaq; numerum ex a b compositum primum: et compositum ex d e scdm ex c tertium et f quartū: et cōsimiliter argumentor. quia quota pars a b ad d e. tota pars c ad f. cōpositus igitur ex a b ⁊ c primo ⁊ tertio tota pars erit compositi ex d e et f secūdo et quarto: quota pars a b ad d e. q̄re compositus ex d e f eque multiplex ad compositū a b c vt d ad a. et ita si cōplures nūeri succrescerēt: semp vtare precedentium cōposito vsq; dum aduenimū decūbas: efficiesq; ꝓpositū.

7 ¶ Si quoties vnitas in primo toties secūdus in tertio: quoties vnitas in scdo: toties primus in tertio.

¶ Sint a b c tres numeri: a primus. b secūdus. c tertius: sitq; vt quoties fuerit vnitas in a. toties sit b in c. dico ergo q; quoties vnitas fuerit in b: toties a esse in c. diuido enī a primum nūerū in vnitates ⁊ c tertium in totidem partes: quaꝝ quelibet erit equalis b secundo. quia enī quoties prima pars a in prima part e c toties secūda in secūda: et tertia in tertia: et ita deinceps. ergo per precedentem cōpositus a tota pars erit compositi c: quota pars prima pars eius ad primam partem c: et c eque multiplex ad a: vt eius prima pars ad primam ꝑtem a. at quoties vnitas in b: toties prima pars a in pma parte c. Nam vnitas equatur pme parti a: ⁊ b prime parti c. ergo quoties vnitas in b secūdo: toties a primus in c tertio. quod erat demonstrandum.

8 ¶ Si alterna fiat duoꝝ numerorum multiplicatio: idem numerus vtrobiq; ꝓueniet.
¶ Ut si a multiplicat b et prouenit c: dico etiā si b multiplicat a iidem prouenire c. nam si a multiplicat b et ꝓueniat c: per diffinitionem quoties erit vnitas in a: toties erit b in c. ergo per premissam quoties vnitas in b secūdo: toties a primus in c tertio. per diffinitionem igitur si a sibi toties coaceruatur quoties vnitas in b: per diffinitionem a per b multiplicatur. at cum hoc fit prouenit c. nam ꝓbatū est a toties coaceruari in c: quoties vnitas in b. constat ergo propositum.

9 ¶ Quod fit ex ductu alicuius numeri in quotlibet: tm̄ est q̄tum est quod fit ex ductu eiusdem in compositum ex illis.

¶ Sit a numerus qui ducatur in b et proueniat d: et in c et proueniat e: dico ergo q; compositus ex d e ꝓducitur ex ductu a in compositum b c. cū enim b multiplicet d scdm a: b per diffinitionem nūerat d scdm a: et per idem c numerat e scdm a. sunt igitur d et e eque multiplices b et c: quare per sextam compositus ex d e eque multiplex ad compositum ex b c. Sit igitur f productus ex ductu a in ꝯposito b c. cū itaq; b c multiplicet f scdm a: nūerabit igitur numerus b c ipm f scdm a. quare eque multiplex f ad b c vt d ad b. sed eidem b c aggregatus d e ꝓbatus ē eque multiplex. sunt igitur d e et f eidem b c eque multiplices: per tertiam conceptionem adinuicem equales. Est igitur qd̄ fit ex ductu alicuius numeri in quotlibet tm̄: q̄tum qd̄ fit ex ductu eiusdē in cōpositum ex illis quēadmodū erat ꝓpositū.

10 ¶ Quod fit ex ductu quotlibet numerorum in aliquem: equum est illi quod fit ex cōposito illorum in eundem.

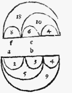
¶ Sit eadem cū precedenti hypothesis sed cōuerso ordine: vt ducātur b et c in a et prouenient d et e. Dico quod fit ex ductu b et c in a singillatim equū esse ei quod fit ex composito b c in a. nam ꝑ precedētem qd̄ fit ex ductu a in b ⁊ c singillatim: equū est ei quod fit ex ductu a in compositum b c. ꝗ alternatim per octauam qd̄ fit ex ductu b et c in a: equū est ei quod fit ex composito b c in eūdem. qd̄ est ꝓpositū.

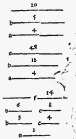
11 ¶ Quod fit ex ductu quotlibet numerorum in quotlibet numeros: equale ē ei quod fit ex composito ipsorum in compositum ex aliis.

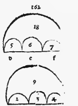
¶ Sint a b c quotlibet numeri qui ducātur in d e f quotlibet alios vt quilibet primorum ducatur in quēlibet secūdoꝝ: dico quod fit ex ductu a b c singillatim in quēlibet alioꝝ d e f eq̄le esse ei quod fit ex ductu compositi a b c in compositum d e f. nam qd̄ fit ex ductu a b c singillatim in d: equū est ei qd̄ fit ex ꝯposito a b c in d. et cōsimiliter de ductu a b et c singillatim in e et f argumētabere qd̄ nichil aliud est q̄ qd̄ fit ex ductu a b et c in d e et f singillatim: per precedentem equale esse ei qd̄ fit ex composito a b c in d e et f singillatim. At per nonam qd̄ fit ex composito a b c singillatim in d e et f: equum est ei quod fit ex ꝯposito a b c: in compositum d e f. quare cōstat quod fit ex ductu quotlibet numerorum in quotlibet numeros equum esse ei quod fit ex composito illoꝝ in compositum ex aliis. Et he quattuor octaua: nona: decima: et vndecima: praxim multiplicandiq; modum plane declarant.

12 ¶ Quicunq; numerus numerat totum et detractum: numerat et residuum.
¶ Sit a b totum: a detractum et b residuum. dico q; si c numerat a b et a: ipm nūerare b. numeret enī a b scdm numerum d e et a quidē scdm d. quia igitur per nonam q̄tum est c in d e: tm̄ est c in d et c in e. At a equale est ei qd̄ fit ex c in d: igitur a cū eo qd̄ fit ex c in e: equū est a b. quare qd̄ fit ex c in e: equū est b. sed c numerat qd̄ fit ex e in c per diffinitionem: igitur ⁊ b suū equale numerabit. qd̄ est ꝓpositū.

13 ¶ Tm̄ est qd̄ fit ex ductu nūeri in se: q̄tū qd̄ fit ex ductu eiusdem in oēs suas partes.
¶ Sit a quicūq; nūerus quē semel pono diuisum in oēs suas ptes q̄ sint b c d e: ⁊ semel indiuisū: tūc qd̄ fiet ex a in b ⁊ in c ⁊ in d ⁊ e ꝑ nonā equū est ei qui fit ex a in ꝯpositū ex b c d e. at ꝯpositū b c d e: est a. qd̄ fit igit̄ ex ductu numeri in oēs suas partes: equū est ei qd̄ fit ex ductu eiusdē numeri in se. q̄re ⁊ alt̄natim per octauam qd̄ fit ex ductu nūeri in se: tm̄ est q̄tum qd̄ fit ex ductu eiusdē in oēs suas ptes.



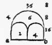






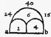
¶ Numero in duo diuiso quod fit ex ductu totius numeri in alteꝝ illoꝝ: est q̄tum qđ fit ex ductu eiusdem in se ꝛ in reliquum. 14

¶ Sit a b nūerus in duo a ꝛ b diuisus. dico qđ fit ex ductu a b in a equū esse ei qđ fit ex ductu a in se ꝛ in b. et ita quoq̄ qđ fit ex a b in b: equale ēē ei qđ fit ex b in se ꝛ b in a. ducatur ergo a b in a: tunc qđ fiet ex ductu a b in a p octauam equū erit ei qđ fit ex ductu a in a b. at qđ fit ex ductu alicuius in a ꝛ in b equū est per nonā facto ex ductu in compositū a b. ergo cū a ducit in seipm a ꝛ in b: tm̄ facit q̄tum a b in a. et ita argumentare si a b ducatur in b. et consimili modo concludes propositum. Pot es q̄ id clarius videre si bis ponis a et bis ponis b.



¶ Si numerus in duo diuidatur: qđ fit ex ductu totius in se tm̄ est: q̄tum quod fit ex ductu vtriusq̄ diuidentium in se ꝛ vnius bis in alteꝝ. 15

¶ Sit a b numerus in duo a ꝛ b diuisus: dico qđ fit ex ductu a b in se equū ēē ei quod fit ex ductu a in se ꝛ b in se: et ex ductu bis a in b. Nam qđ fit ex a b in se: equū est ei quod fit ex ductu eius in a ꝛ b p tridecimam. At qđ fit ex ductu a b totius in a ꝛ in b p precedentem bis sumptam: equū est ei quod fit ex ductu a in se ꝛ in b et b in se ꝛ in a. sed qđ fit ex a in b ꝛ b in a alternatim p octauā equal' ei qđ fit ex ductu bis a in b. quod fit igit' ex a b in se: equal' ei quod fit ex a in se ꝛ b in se: et ex a bis in b qđ pponebatur. Et ex hoc cognoscitur modus eliciendi latus tetragonum.



¶ Si numerus in duo diuidat': qđ fit ex toto in se cū eo qđ fit ex altero in se fit: equū est ei qđ ex toto in illud idem bis: qđq̄ ex reliquo in se ducto pducitur. 16

¶ Sit vt prius a b numer⁹ in duo a ꝛ b diuisus: dico quod pducit' ex a b in se cū eo quod fit ex a in se: equū esse ei quod fit ex a b bis in a/ ꝛ b in se. Nam qđ fit ex a b in se p precedentem tm̄ est q̄tū quod fit ex a in se ꝛ b in se: et a bis in b. quod ergo fit ex a b in se cū eo quod fit ex a in se: tm̄ erit q̄tum quod ex a in se bis ꝛ a in b bis ꝛ b in se. sed quod fit ex a in se bis/ et bis in b per 14 equal' ei quod fit ex a b in a bis. cui adde quod fit ex b in se. tunc q̄q̄ quod fit ex a b in se cū eo quod fit ex a in se: equabit' ei quod fit ex a b in a bis ꝛ b in se. quod est propositum.



¶ Si numerus in duo diuidatur qđ fit ex toto in se: equū est ei qđ fit ex ductu vnius partis in aliud quater: cum eo qđ fit ex differentia in se. 17

¶ Sit a b nūerus in duo a ꝛ b diuisus sitq̄ b mai⁹: diuidat'q̄ iteꝝ b in duo scʒ in d equale a: ꝛ c dr̄am b ad a. dico quod fit ex a b in se: equū ēē ei quod fit ex ductu quater a in b ꝛ c in se. Nā p decimāquintā quod fit ex a b in se: equū est ei quod fit ex a bis in b ꝛ a in se ꝛ b in se. at p p̄cedentē quod fit ex b ī se cū a in se equali d vni ptiū b: equal' ei quod fit ex b bis in a ꝛ c in se: q̄re alt'natim p octauam ꝛ ei quod fit ex a bis in b ꝛ c in se. Igit' a b in se tantus est q̄tus a quater in b cū differētia c in se. quod intendit ur.



¶ Qđ fit ex minore diuidētium in se cum eo qđ fit ex toto in coꝝ differentiam tm̄ est q̄tum quod pueniit ex maiore coꝝūdem per se multiplicato. 18

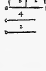
¶ Sit a numerus diuisus in b maius ꝛ c minus: sitq̄ d differentia b ad c. dico quod fit ex c in se: cum eo quod fit ex a in d: tm̄ esse q̄tum quod fit ex b in se. Nam per decimam quod fit ex a in d: equal' ei qđ fit ex b in d ꝛ c in d. Sit itaq̄ illđ e. et quia b diuisum est in e ꝛ d differentiam: per 14 quod fit ex b in d alteꝝ diuidentium: equum est ei quod fit ex d in se ꝛ in c. et cum per octauam c in d etiam eque' d in c: erit igit' a in d equum ipsi d in se ꝛ bis d in c simul. quibus si addas c in se quod sit f: totum quod puenit ex a in d ꝛ c in se scʒ e ꝛ f equabit' d in se: c in se et bis d in c. at b in se (cum ipm diuisum sit in d ꝛ c aut equale) per decimāquintā tm̄ etiā est q̄tū d in se c in se: ꝛ bis d in c. scʒ q̄tum fit ex ductu vtriusq̄ partium in se: ꝛ vnius in alteram bis. Est igit' quod fit ex a in d toto scʒ in differentiam: cum c minore parte in se: q̄tum quod fit ex b maiori parte in se multiplicata. quod intendit propositio.



¶ Si numerus per duo equalia duoq̄ inequalia secetur: qđ ex ductu vnius equaliū in se producitur tm̄ est: q̄tum qđ fit ex ductu vnius inequalium in reliquū cum eo qđ fit ex differentia in differentiam. 19

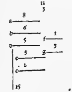


¶ Priusq̄ veniamus ad demonstrationem: notatu dignum arbitror q̄ quādo aliq̄s numerus vt a b in duo equalia pariter ꝛ in duo inequalia vt in a minus ꝛ b maius diuidit': illa duo inequalia ad vnū equalium quod totius medietas est: eandem atq̄ cōem habere differentiam. nam cum illorū duorum inequalium simul iunctoꝝ illud equale sit medietas: illa ab eo equidistare per secūdaꝫ partem secūde huius necesse est: quare ad ipm cōem habebunt differentiam. Hic fit etiā vt differētia vnius inequaliū ad reliquum: dupla sit ad differentiam cōem ipsius equalis ad ipsa. Nam cum ipsa inequalia vt a ꝛ b extrema sint et ipsum equale medium: per octauam conceptionem differentia ipsoꝝ constituta est ex differentijs eorum ad ipm medium. Sed hec statim nota sunt. Nos ergo ad propositi demōstratiōem cōuertamus. Sit a b nūerus diuisus in a maiorem portionem ꝛ b minorem: sitq̄ c vna eius medietas et d sit differētia cōmunis c ad a et ad b. Nam vt ostēsum est c ad vtrunq̄ candē communēq̄ habebit differentiā. Dico q̄ fit ex c in se tm̄ esse quantū qđ fit ex a in b cum eo qđ ex d in se. qz enī c diuisum ē in d et b. ideo per decimāquintā qđ fit ex c in se equū ē ei qđ fit ex d in se et b in se et b in d bis. et qz a maior portio est totū et eius partes b et differētia dupla ad d. ergo per decimāquartā a in b tantū est quantū qđ fit ex b in se et b bis in d. adde igitur ei qđ fit ex a in b numerū qui fit ex d in se: ꝛ tunc totū qđ fit ex a in b et d in se equabit' ei quod fit ex d in se b in se et b in d bis: cui demonstratum est equari



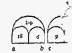
e in se. constat igitur qđ fit ex ductu vnius equaliū in se tantū esse q̃ntum qđ ex vno inequaliū in reliquū cum eo qđ fit ex differentia in differentiā.

10 **℄ Si numerus per duas quaslibet diuisiones diuidatur: qđ fit ex ductu maximi diuidentiū in minimū cum eo qđ fit ex differētia ipsius maximi ad alterū mediorū in differentiam eiusdem ad minimū tantum est q̃ntum qđ fit ex ductu duorum medioꝝ vnius in alterum.**



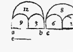
℄ Ut in precedēti id ante animaduertere licet q̄ cū quilibet numerus duabus hoc pacto diuisionibꝰ secatur vt s vna diuisione in b ꝛ c et scđa in d e. quorū b sit maximus et c minimus ꝛ d medioꝝ maior et e minor que differētia primi ad secundū eandē esse tertiū ad quartū ipsis sic ordinatis. Nam q̄ꝛ d e equales sunt circūpositis b c: ab illis per secundā partē tertie equidistāt. quare q̄ differētia b ad d que sit f: eadē erit e ad c. et etiam que differētia b ad e que sit g: eadē erit d ad c. Nam per octauā conceptionem differētia extremorū b c constituitur ex differētiis b ad d et d ad c. ꝛ differētia d ad c extremorū per idē constituitur ex differētiis d ad e ꝛ e ad c. Sed differētia d ad e est vtriꝗ̄ cōmunis: et differētia e ad c probata est equalis differētie b ad d. erunt igitur differētie b ad e ꝛ d ad c ex equalibus quidem constitute adiuuicem equales. Esto ergo a numerus eo qui positus est modo diuisus et differentie vt posite sunt assignate. dico ergo qđ fit ex ductu b maximi diuidentiū in c minimū cū eo qđ fit ex f in g: equale esse ei qđ fit ex d in e vnius videlꝫ mediorū in reliquū. qđ enī fit ex ductu d in e per nonā adiuuāte octaua tm̄ est q̃ntum qđ fit ex d in c et in f. Nam e diuisum est in c et dīam f. Sed qđ fit ex d in c et f per octauā equū est ei qđ fit ex c et f in d. et qđ fit ex f in d equaꝛ per nonam ei qđ fit ex f in c ꝛ g. at qđ fit ex f in c tm̄ est per octauā q̃ntum qđ ex c in f. q̄ aūt ex c in d ꝛ in f tm̄ est per nonam q̃ntum qđ ex c in b. constat igitur qđ fit ex d in e tm̄ esse q̃ntum qđ ex c in b cū eo qđ fit ex f in g ꝛ propositum.

11 **℄ Si quota pars totus totius tota pars detractus detracti: erit residuus residui tota pars quota totus totius.**



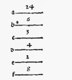
℄ Sit a b numerus cuiꝰ detractus sit b ꝛ residuus a. sitꝗ̄ alius numerꝰ c d cuius detractꝰ sit d et residuus c ꝛ quota pars totus c d est totius a b: tota pars sit d detractus detracti b. dico ergo totā partem c residuū esse residui a: quota pars est totus c d totius a b. capio numerū e cuiꝰ c tota pars sit quota d est b. et intelligo quattuor numeros c primū e secundū d tertiū b quartū. constat enī per quartā q̄ꝛ c tota pars est e quota d est b: compositū c d totam partē esse cōpositi e b quota pars c est e ꝛ tota pars positus est c d ad a b. est igiꝛ a b eque multiplex ad c d vt e b ad c d et per tertiā conceptionē adiuuicē equales. quare e est equalis a. ꝛ vt c ad e: ita quoꝗ̄ c ad a. sed c ad d e est vt detracti ad detractū ꝛ totius ad totum. est igitur c ad a residuus ad residuū vt totus ad totum et quota pars totus totius quod est propositum.

12 **℄ Si quote partes totus totius tote partes fuerit detractus detracti: erit residuus residui tote partes quote totus totius.**



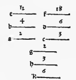
℄ Sit a b numerus cuius detractus sit b et residuus a. ꝛ c d alius numerus cuius detractus sit d et residuus c ꝛ quote partes totus c d est totius a b: tote sit detractꝰ d detracti b. Dico ergo c totas ptes esse a quote c d est ipsius a b. Pone numerū e cuius c tote partes sint quote d est b ꝛ argumētare penitus eodēmodo per quintam quomodo in precedenti argumētatus es per quartā.

13 **℄ Omnis pars partis: est pars totius denominata a numero qui fit ex ductu duorū numeroꝝ vnius in alterū partes illas denominantiū.**



℄ Sit a totus numerus: b eius pars et c pars b ꝛ numerꝰ denominās b in a sit d et denominās c in b sit e. sitꝗ̄ f numerus qui fit ex ductu d in e. Dico ergo c denomīari in a ab f numero scꝫ qui fit ex ductu duorum denominantiū vnius in alterum. Diuido enim f in partes equales e: ꝛ similiter a in partes equales b. et q̄ꝛ quoties b est in a: toties e est in f. est enim d denoīator vtriusꝗ̄ cōmunis per hypothesim cum b secundū ipsum numereꝛ in a: et e secundū eundem numereꝛ in f. Ideo quot partes numero habet a ad b: tot habet f ad e. at q̄ꝛ c numerat b secundū e cum ex hypothesi e sit denominās quoties c in b. numerabit igitur c primā partem a equalē ipsi b per primā partēꝫ f equalē ipsi e. ꝛ eadē ratione secundā per secūdam ꝛ tertiā per tertiam. et ita de ceteris si plures sunt. quare c per decimā numerabit a secundū f. per diffinitionē igitur denominabitur quoties c in a secundū f atꝗ̄ f erit ipsum denominans. est itaꝗ̄ c pars partis denoīata pars totius a ab f numero quidē qui fit ex ductu duoꝝ numerorum illas partes denominantiū vnius in alterum quod intenditur.

14 **℄ Si fuerit primus secūdi tota pars quota tertius quarti: itēꝗ̄ secūdus quinti quota pars quartus sexti: erit primus quinti tota pars quota tertius sexti.**



℄ Sint sex numeri: a primus: b secundus: c tertius: d quartus: e quintus: f sextus. sitꝗ̄ a tota pars b quota c est d ꝛ b tota pars e quota d fuerit f. dico igitur a totā partem esse e quota pars c est ipsius f. sit enī g denominās quoties a in b et h quoties b in e. cum a sit pars b ꝛ b pars e. ducaꝛꝗ̄ g in h ꝛ proueniat k. q̄ꝛ igitur a est pars b partis scꝫ ipiꝰ e per precedentē a denominatur pars e a numero k qui fit ex ductu g in h numerorū illas partes denominantiū vnius in alterum. at numerus h denominās b in e est etiam numerus denominās d in f ꝛ g denominās a in b etiam denominat c in d. denoīabitur igitur per eandem precedentem c in f ab eodem numero k qui fit ex ductu g in h denominantiū illas

a iiii



partes quare quota pars est a primus e quinti tota pars est c tertius f sexti vtpote que ab eodem numero k denominatur: quod est propositum.

Si primus in secundo quoties quartus in sexto: itemque tertius in quarto quoties scds in quinto: necesse est toties esse primū in quinto quoties fuerit tertius in sexto. 25

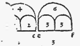
Sint vt prius sex numeri: a primus: b secūdus: c tertius: d quartus: e quintus: f sextus. sitque a tota pars b quota d est f et c tota pars d quota b est ipsius e. dico a totam partem esse e quota c est f. hec penitus vt precedens demonstratur.

Si fuerit primus tota pars scdi quota tertius quarti: itemque primus quinti quota tertius sexti erit primus tota pars secundi et quinti quota tertius quarti et sexti. 26

Sint sex numeri: a primus: b secūdus: c tertius: d quartus: e quintus: f sextus. sitque primus in scdo vt tertius in quarto et primus in quinto vt tertius in sexto. dico a primū esse totā partem b e secundi et quinti quota c tertius est d f quarti et sexti. qr per hypothesim primus in secūdo vt tertius in quarto sit ergo g numerus denominās quoties a in b et c in d. et qr etiam per eandem hypothesim primus in quinto vt tertius in sexto. sit ergo h numerus denominās vtriusque scz quoties a in e et c in f. sitque compositum ex g h numerus k. tunc sic: qd fit ex ductu a in g et h: tantū est quantum b et e. et per nonam quod fit ex a in g et h: tantū est quantum qd ex a in k compositū ex ipsis. Similiter quod fit ex c in g et h: tantū est quantum d et f. et quantum qd fit ex c in k. igitur a primus tota pars est b e secundi et quinti quota c tertius d f quarti et sexti: vt qui numerentur in illis sm eundem numerū k: quod vult propositio.

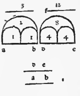
Si fuerit primus secundi tota pars quota tertius quarti primis quidē minoribus erit primus tertij tota pars aut partes quota pars aut partes secundus quarti. 27

Sit a primus numerus: b c secundus: et d tertius: e f quartus: a et b c simul existētibus minoribus et quota pars a est b c tota pars d sit e f. dico igitur quarta pars aut partes b c fuerit e f totam partē aut partes numerū a esse d. Diuido enī b c in partes suas equales a que sint b et c. item diuido e f in partes suas equales d. et qr e f est eque multiplex ad d vt b c ad a ex hypothesi: ideo tot partes numero erunt ipsius e f quot posite sunt b c. Sint igitur ille e et f. cum igitur b prima pars b c sit equalis a et e prima pars ipsius e f sit equalis d quota pars aut partes b erit e tota pars aut partes a est d. et ita de parte c respectu partis f et reliquis partibus vnius ad reliquas partes alterius si plures essent. Intellige igitur b esse primū numerū: e secundum: c tertium: f quartū. et si b est partes e argumāto per quintā: qr primus b probatus est tote partes e secūdi quote ptes est c tertius f quarti. ergo b c primus et tertius tote partes sunt e f secundi et quarti quote partes b primus est e secūdi. at a ad d monstratus est tote partes quote b est e. igitur et quote b c secundus est e f quarti. et si b esset pars e omnino consimili modo per quartā vt nunc quoque factum est per quītam elicerem argumentū. Manifestū itaque est si primus in secundo vt tertius in quarto primis existentibus minoribus: primum totam partem aut partes esse tertij quota pars aut partes secundus ē quarti.



Si primus tote partes secundi quote tertius quarti primo et secundo minoribus erit primus tota pars aut partes tertij quota ps aut partes secundus quarti. 28

Sint quattuor numeri: a b primus: c secundus: d e tertius: et f quartus. quorum a b et c duo primi duobus reliquis sint minores: et sit a b tote partes c: quote d e est f. dico a b totam partē vel partes eē d e quota pars vel partes c est f. diuido enī a b in suas partes ad c que sint a et b et similiter d e in suas ad f que sint d et e. cum igitur per hypothesim a b tot partes sit c quot partes d e est f: tot erunt ptes numero a b diuisi quot et d e. et a prima pars a b tota erit c sui totius quota d prima pars d e est sui totius f. quare per precedentē a prima pars a b ad d primam partem d e tota pars aut partes quota aut quote c ad f. et similiter b secunda pars primi ad e secūdam partem tertij tota pars aut partes quota vel quote c ad f. sicque de reliquis partibus primi ad reliquas tertij si plures sint partes. At si a ad d sit pars facio a primum numerū: d secundum: b tertium: et e quartum. et argumentor per quartam: quia a tota pars est d quota b est e. ergo a b ad d e tota pars quota a ad d. sed a ad d monstratus est tota ps quota c ad f. ergo a b primus ad d e tertium tota pars quota c ad f secundus ad quartum. Quod si a ad d sit partes penitus consimili modo per quītam argumentabere quomodo nunc per quartam de parte constat esse argumentatū. Planum itaque est solidum esse propositum. Et si contingeret duos primos numeros duobus vltimis esse maiores: conuerso modo concludēdum esset tertium primi totam partem aut partes quota quartus secundi. quod facile monstrari potest ordine permutato constituendo scz duos vltimos priores et primum et secundū posteriores.

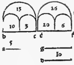


Omnis numerus minor aut maioris pars est: aut eo ab maiore quoties potest detracto relinquetur ipsius aut pars aut partes 29



Sint a b duo numeri a maior et b minor. dico b esse partem a vel eo detracto quoties poterit ab a remanere ipsius b aut partem aut partes. si enim b minor numerat a maiorem per diffinitionē b est pars a. si secus autem b non metitur. substracto igitur b quoties poterit ab a remanebit minor b. Nam si nichil remaneret numeraret a secundū numerum denominantē quoties substraheretur. quoties enim aliquis numerus ab aliquo substrahi potest: toties in ipso numerabilis est per sextā petitionem qui si remanet minor b per primam propositionem est ipsius b aut pars aut partes: quod est propositum.

30 ¶ Si quote partes primus secundi tote tertius quarti primio ĩdẽ semp minoribus: quoties erit primus in secũdo toties tertius in quarto. et quota pars vel partes primi supererunt in secũdo: tota pars aut partes tertij supererunt in quarto.



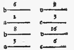
¶ Sit a primus numerus, secũdus b c, tertius d, et quartus e f, et primi a et b c minores: sitq3 a primus tot et tote partes b c secũdi quot et quote ptes d tertius est e f quarti. Dico quoties a est in b c: toties d esse in e f. et quota pars vel partes a primi supsunt in b c secũdo totam ptẽ vl ptes d tertij remanere in e f q̃rto. substraho enĩ a primũ a scdo b c q̃ties possum: sitq3 totus substractus b 7 residuus c: sitq3 d toties ĩ g: q̃ties a ĩ b. quo d q̃d ẽ ita posito q2 a tote ptes ẽ b e q̃te d ẽ e f: ergo p vicesimãoctauã a tota ps vel ptes ẽ d: q̃ta ps vel ptes b c ẽ e f. Rursus ĩtelligo a p̃mũ numerũ, b scdm, d tertiũ, g quartũ: 7 ɔsilr argumẽtor p vicesimãseptimã. q2 a tota ps est b q̃ta d est g p hypothesim: ergo p vicesimãseptimã q̃ta ps vel ptes b ẽ g: tota ps vel ptes a ẽ d. at a ostẽsus est tota ps vel ptes d q̃ta ps vel ptes b c est e f: igr quota ps vel ptes ẽ b c ad e f: tota ps vl ptes ẽ b ad g. at q2 q̃t ptes a ẽ b c: tot ptes d ẽ e f. et quot ptes a ẽ b: tot ptes d ẽ g. nã b 7 g eq̃ multiplices: et a ẽ pauciores tote ptes b q̃ totius b c: igif 7 d pauciores tote ptes ẽ g q̃ e f. substrahaf igif g ab e f: sitq3 detractus e 7 residuus f: 7 ɔstabit primũ ppõnis ppositũ. sc3 q̃tiens a in b c: toties d eẽ in e f cũ e sit eq̃lis g. ex hoc etiã manifestũ est b totã ptẽ vel ptes esse e f cũ e 7 g equanf: detracti sc3 ad detractũ q̃ta pars vel ptes ẽ totus b c ad e f totũ. si aũt nũerus b ipi9 e tota ps fuerit: g p vicesimãprimã erit c residuus residui f tota ps q̃ta tot9 totius. si aũt tote ptes: erit p vicesimãscdã3 c residu9 tote ptes residui f: q̃te b c totus e f tot9. s3 esto g̃ vt b tota ps sit e q̃ta ps totus b c: ẽ tot9 e f. Intelligo c p̃mũ, f scdm, b c tertiũ, et e f quartũ: 7 argumẽtor p vicesimãseptimã. q̃a quota ps c ẽ f: tota ps b c ẽ e f vt mõstratũ est: ergo q̃ta ps vel ptes c ẽ ad b f: tota ps vel ptes f est ad e f. et si b eẽt ptes e ɔsilr argumẽtare p vicesimãoctauã 7 ɔclude itez p cã c totã ptem vel ptes eẽ totius b c: quota pars vel partes f est totius e f. et hoc est totum propositum.

31 ¶ Si toties dempto primo de secundo quoties tertio de quarto tota pars vel partes primi relinquãtur in secundo quota aut quote tertij in quarto: primũ totas eẽ partes secundi quotas tertium quarti necesse est.

¶ Hec est ɔuersa precedẽtis que vt p̃cedẽtes duobus primis nũeris minoribus intelligaf. sit igitur a vt prius p̃mus numerus, b c secũdus, d tertius, et e f quart9: et sint duo primi mĩores: 7 toties demaf primus a secũdo sitq3 dẽptus b: quoties terti9 a quarto qui dẽptus sit e et sint q̃ta pars vel ptes p̃mi relinquãtur in scdo tota pars vel ptes tertij relinquantur in quarto: sitq3 c relicta ps vel ptes in scdo et f in quarto. Dico ergo a primũ totas eẽ partes b c secũdi quote d tertius est e f quarti. Capio g q̃ sit tote ptes e f quote ptes a est b c 7 p precedentem quoties a est in b c: toties g erit in e f. et quota ps aut ptes a supsunt in b c: tota ps aut ptes g superũt ĩ e f. Et toties positus est d eẽ in e f: q̃ties a est in b c. et totã ptem vel ptes d supesse in e f: quota ps vel ptes a supsunt in b c: igitur g 7 d adiuicem sunt equales. quote igitur partes a est b c: tote d est e f. quod est propositum.

¶ Primi elementorum Arithmetice Jordani finis.

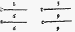
p Roportio est duaꝝ quãtitatum eiusdem generis vnius ad alteram certa in quãtitate relatio. ¶ Numeri ad numerũ dicitur pportio minoris q̃dẽ ad maiorem in eo q2 pars est vel partes: maioris vo ad minorem fm q2 eum cõtinet et eius partem aut partes. ¶ Proportionalitas est silitudo pportionũ. ¶ Continua pportionalitas est q̃n ɔnectũtur nõ dissociatis medijs. hec aũt ad minus iter tres coalescit terios: cũ saltem vnũ sumẽdum sit mediũ Incõtinua vo est in qua intercedit mediorũ interruptio. Et hec ad mĩmum quattuor exigit terios pter alterius medij sumptionem. ¶ Quãdo fuerit tres numeri ɔtinue pportionales: dicetur primi ad tertium proportio primi ad secũdum duplicata et ad quartum triplicata. ¶ Cum aũt cõtinuate fuerint vel eedem vel diuerse pporiones: dicetur primi ad vltimum pportio ex oibus composita. Denoiatio dicitur pportiõis minoris quidẽ ad maiorem pars vel partes quota vel quote illi9 fuerint: maioris vo ad minorem numerus fm quem eũ cõtinet et pars vel partes minoris que in maiore superfluunt. Similes siue vna alij eadem: dicũtur pportiones que candem recipiunt denoiationem. maior vo que maiorem: et minor que minorem.



1 ¶ Si fuerit proportio primi ad scdm que tertij ad quartum: erit ecõuerso que secũdi ad primum eadem quarti ad tertium.

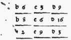
¶ Hec demõstrat ɔuersam pportionalitatem: que ab euclide quĩto geometrie potif prĩa spẽs ppor tionalitatum. et est quoties cõcludimus ɔña ad añcedens vt ɔña ad añs: q2 añs ad ɔña sese habuerit vt añcedens ad ɔña. añcedẽs enĩ est primũ pportionis extremum: ɔña vo scdm. Sint itaq3 quattuor numeri: a primus, b secundus, c tertius, d quartus: sitq3 vt que proportio a ad b: eadem sit c ad d. dico ecõuerso que proportio b ad a: eãdez esse d ad c. Nam cũ ea sit pportio c ad d que a ad b p diffinitionẽ eandem habebũt denomĩationem. si itaq3 a sit minor b ex diffinitiõibus tota pars vel partes erit a ad

b: quota pars vel partes c ad d. Si autem sit a ad b tota pars quota c ad d: vt in prima figuratione mõstratur: erit d eque multiplex ad c vt b ad a. quare que proportio b multiplicis ad a. eadem erit d eque multiplicis ad c. at si a tote partes sit b quote c est d: per tricesimã igitur primi b toties cõtinebit ipsum a et totã eius partẽ vel partes: quoties d cõtinet c et quotã eius partem vel partes. quare similis erit denominatio b ad a que d ad c: et que proportio b ad a eadem est d ad c. Quod si a numerus est maior b: cõsimili argumẽto pateat propositum ponẽdo b primum numerum. a secundum / d tertium / c quartum.



¶ Si fuerit primus ad secundum sicut tertius ad quartum: fueritque primus maior secundo erit tertius maior quarto. 2

¶ Sint vt prius quatuor numeri: a primus / b secundus / c tertius / d quartus: sitque a maior b. dico etiã c esse maiorem d. Nam per precedentem que proportio a ad b ea est c ad d: ideo et cõtra que proportio b ad a eadem erit d ad c. at b ponitur minor a: igitur erit per primam primi b pars aut partes a. quare et d tota pars vel partes c. atque d minor c quod intendit. Potest et directe probare quod a cum maior b aliquotiens cõtinet b vel aliquoties et partẽ aut partes. et cũ c eandem proportionẽ habeat ad d: ergo toties c cõtinebit d aut toties et partem aut partes. quare c maior est d. quod est propositum. Et cõsimiliter probare possis et facillime si primus minor secundo fuerit: tertiũ quarto esse minorem. Nam si primus sit minor secundo per primam primi erit pars vel partes secundi. et cũ tertius ad quartum eãdem habeat proportiõem: tota pars aut partes erit tertius quarti: quare minor quarto. et si primus est equalis secundo cõsimiliter probabis tertium esse equalem quarto.



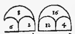
¶ Si fuerit primus ad secundum sicut tertius ad quartum: erit permutatim sicut primus ad tertium: ita secundus ad quartum. 3

¶ Hec demonstrat permutatam proportionalitatem: que est quoties cõcludimus vt antecedens ad antecedens: ita consequens ad cõsequens: quod vt antecedens ad consequens: ita antecedens ad cõsequens sese habuerat. Sint ergo quatuor numeri: a primus / b secundus / c tertius / d quartus: sitque similis proportio a ad b et c ad d. dico similem esse proportionem a ad c et b ad d. Nam primo si a sit minor et pars b: quia similis est proportio a ad b et c ad d: hinc euenit vt quota pars a sit b tota pars c sit d. ergo per vicesimãseptimã primi: quota pars vel partes b est ad d: tota pars vel partes erit a ad c. erit itaque eadem proportio a primi ad c tertium: et b secundi ad d quartum. Si vero si a sit partes b vt in secunda figuratione: eadem et similiter argumẽtabere per vicesimãoctauã primi. Tertio si a sit maior b: facto b primo / a secundo / d tertio / c quarto: auxilio prime huius idẽ efficies et facillime.



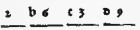
¶ Si fuerit primus ad secundum sicut tertius ad quartum fueritque primus maior tertio: erit quoque secundus maior quarto. 4

¶ Sit a primus numerus: b secundus c tertius d quartus: et similis proportio a ad b et c ad d: sitque a maior c. dico b esse maiorem d. Nam quia vt a ad b: ita c ad d. permutatim igitur per precedentem vt a ad c: ita b ad d. sed a maior est c: ergo et b maior d per secundam. quod est propositum.



¶ Si sicut totus ad totum fuerit detractus ad detractum: erit residuus ad residuum sicut totus ad totum. 5

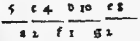
¶ Sit a b totus numerus: a detractus / et b residuus: et c d alter totus c ab eo detractus et d residuus sitque similis proportio a b ad c d: et a ad c: dico b ad d proportionem esse que est a b ad c d. Nam si a b fuerit minor c d: erit per vicesimamprimam et vicesimamsecundam primi sub differentia quota pars aut partes fuerit a b ad c d: vt tota pars vel partes sit b ad d residui ad residuum. quare que proportio totius ad totum: ea erit et residui ad residuum. at si a b sit maior c d: ecõuerso quota pars vel partes c d ad a b: tota pars vel partes erit d ad b. quare iterum per primam huius cõcluditur propositum.



¶ Si fuerit primus ad secundum sicut tertius ad quartũ: erit primus et secundus ad secundum sicut tertius et quartus ad quartum. 6

¶ In hac demõstratur cõiuncta proportionalitas: que est quoties concludimus cõiunctum antecedẽtis et cõsequentis ad cõsequẽs vt cõiunctum antecedentis et cõsequentis ad cõsequens: quod antecedens ad cõsequens se habeat vt antecedẽs ad consequens. Sit vt a primus numerus se habet ad b secundum: ita c tertius se habeat ad d quartum. Dico ergo vt a b ad b: ita et c d ad d. Nam quia est similis proportio a ad b et c ad d: si a ergo sit minor b: erit vt quota pars vel partes a est b: tota pars vel partes c sit d. ergo semel b est in a b: et semel d in c d. et in a b superat a tota pars vel partes b: quota pars vel partes c est ipsius d exuperans in c d. quare que proportio b ad a b: eadem erit d ad c d. per primã ergo huius que proportio a b ad b: eadem erit c d ad d quod est propositum quo ad hoc. At vero si a ponatur maior b vt in secunda figuratiõe per primam quota pars vel partes b erit ad a: tota pars vel partes d est ad c. ergo b semel se supaddẽs in a b: tota pars vel partes erit a b: quota pars vel partes d erit c d se itidem semel supaddens in c d. quare eadem proportio b ad a b et d ad c d. per primam ergo huius que proportio a b ad b: eadem erit c d ad d. quod iterum est propositum.

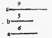
¶ Si vnus numerus duos multiplicet: erit productorum et multiplicatorum eadẽ proportio. vnde manifestũ est multiplicium dũas submultiplicium differentiis eẽ eque multiplices. 7



¶ Multiplicet a numerum b et proueniat d: et idem a multiplicet c et proueniat e. dico que proportio b ad c / multiplicati scilicet ad multiplicatum eãdem esse d ad e. producti scilicet ad productum. Nam cũ b sit in d secundum a: et c in e etiam secundum a: quoties b est in d toties c est in e. ergo que proportio b ad d ea erit c ad e. permutatim igitur per tertiam que proportio b ad c ea erit d ad e. quod est propositum quo ad hoc: et correlariũ

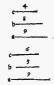
hoc intēdit. si g sit differentia d ad e: et f differentia b ad c. q̄ q̄r d et e sunt sumpti eque multiplices ad b et c: proportionem g ad f esse eque multiplicem vt d ad b. et sint b d duobus reliquis maiores. quia p presentem ea est proportio d ad e: que b ad c. ergo permutatim per tertiam q̄ proportio d ad b totius ad totum: ea est e ad c detracti ad detractum. ergo per quintam g ad f residuum ad residuum vt d ad b totius ad totum. qđ est propositum.

8 ¶ Si duo nūeri eūdem multiplicent: erit multiplicantiū ac productoꝝ eadem proportio.



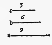
¶ Ut si in figuratione precedētis b multiplicet a: et proueniat d. et c itidem multiplicet a: et proueniat e. Dico q̄ proportio b ad c multiplicātis ad multiplicantem: eādem esse e ad e producti ad productum. Nam per octauam primi idem proueniet multiplicando a p b et b per a scz d. et silr idem proueniet multiplicando a per c et c per a scz e. sed per precedētem b et c multiplicatis per a: eadem est proportio b ad c et d ad e. ergo et multiplicātibus b et c a: eadē erit proportio b ad c et d ad e. qđ est propositum.

9 ¶ Si duo nūeri ad tertiū cōparent: maioris ad ipm maior erit proportio et minoris minor: ipsius vero ad maiorem proportio minor: ad minorē maior. vñ manifestū est si duo nūeri ad eūdem cōparati: eādem seruent proportiōis habitudinē: illos vnū: eūdēq̄ eē nūerū.



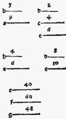
¶ Cōparētur a b ad tertium c sitq̄ a maior b: dico ipsius a ad c maiorem eē proportionem q̄ b ad c: dico etiā c ad a minorem esse proportionem q̄ c ad b. Primū patet et sit primo c tertius vtroq̄ a et b maior. qm̄ c est maior a et maior b: erit a pars vel partes c p primam primi: et per eādem b eiusdē erit pars vel partes. et cū a positus sit maior b ipse erit plures ptes c q̄ b. quare maior proportio a ad c q̄ b ad c. Sit scđo c tertius vtroq̄ a et b minor: si a plurica ptinebit c q̄ b ipm c ptineat: cōstat propositū. Et si a et b equaliter ptinebūt c: q̄r a maior b plures partes ipsius vltra ptinebit a q̄ ptineat ipe b. q̄re idem cōcluditur a scz ad c maiorem eē proportionem q̄ b ad c. Sit tertio c tertius minor a et maior b: quia denoīatio proportiōis a ad c fit a toto multiplice aut a toto et parte aut partibus. et denoīatio proportiōis b ad c est a parte aut partibus: pstat et hoc mō maiorem eē proportionem a ad c q̄ b ad c. et cū non possit c tertius esse maior a et minor b. q̄r quicūq̄ est maior maiore maior est et minore: pstat prima ps quo ad oēs eius modos firma. Scđa pz: et sit pīo c tertius maior a et b cū c sit maior a et b et a sit maior b. si c ptinet plures b minorē q̄ a maiorē: pstat proportionē c ad b esse maiorē q̄ c ad a. et si c cōtinet b et a equalit: cōtinebit insuper plures partes b minoris q̄ a. quare iterū idem cōcluditur. Sit scđo c vtroq̄ minor. erit itaq̄ sumptis vnitatibus totidem partes maioris quot minoris. sed maioris per conceptionem erit totidez partes minores: cum partes ille a maiore numero sint denoīate. quare ipsius ad maiorem iterū minor proportio. Sit tertio c tertius minor a et maior b: cū sit solum pars vel partes a et excedat ipm b: maior erit ipsius ad b proportio q̄ ad a. et cū nō possit vt dictum est eē maior a et minor b: cōstat secūda pars quo ad oēs eius partes monstrata. Correlariū ex prima parte facile cognitum esse potest.

10 ¶ Si idem numerus ad duos cōparetur ad quē ipsius maior proportio fuerit: minorem: et ad quem minor: maiorem esse necesse est.



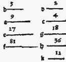
¶ Hec est pversa precedētis. Sint ergo a b duo nūeri ad quos cōparetur c tertius. et sit c ad a minor proportio: et c ad b proportio maior. dico a eē maiorem: et b minorem. Nam p̄mo non erunt equales: quia c ad vtrūq̄ eēt eadem proportio. neq̄ a erit minor b. nam per primam partem precedētis: minor eēt a ad c proportio q̄ b ad c. et per scđam partem eiusdem maior c ad a proportio: et minor e ad b. qđ est ptra hypothesim. relinqtur igitur propositum verum.

11 ¶ Si fuerit proportio primi ad scđm maior q̄ tertii ad quartum: erit secūdi ad primū proportio minor q̄ quarti ad tertium.



¶ Hanc in multiplicibus demōstrare pfacile est: vt si sit a ad b in genere multiplici maior proportio q̄ c ad d: dicam b ad a minorem esse proportionem q̄ d ad c. capiam eni e eque multiplicem ad d: vt a ad b. q̄r ergo a ad b et e ad d eque multiplices: erit a ad b et e ad d eadem proportio. at proportio a ad b posita est maior q̄ c ad d: ergo et proportio e ad d maior est q̄ c ad d. per scđam partem igitur none maior est proportio d ad c q̄ d ad e. at q̄r eadem est proportio a ad b et e ad d. per primā igitur huius eadem erit proportio b ad a et d ad e. sed d ad c pbata est maior proportione d ad e: maior igitur erit et sua equali b ad a. qđ est propositum. at q̄r demōstratio hec non eque aptanda est aliis gñibus: idcirco alia vniūsalior adhibenda est. Sit ergo a ad b maior proportio q̄ c ad d: dico b ad a minorem eē proportionem q̄ d ad c. duco eni c in b et proueniat e: et idē c in a et proueniat f. per septimā huius q̄ proportio a ad b: eadem erit f ad e. Rursus duco d in a et proueniat g. q̄r c et d multiplicauerūt a p octauam eadem erit proportio f ad g producti ad productum: q̄ c ad d multiplicātis ad multiplicantem. Est igitur f ad e proportio vt a ad b: et f ad g vt c ad d. sed proportio a ad b posita est maior proportiōe c ad d: igitur proportio f ad e maior est proportiōe eiusdē f ad g. per precedētem igitur e minor est et g maior. igitur per primam partem none huius proportio e ad f minor est q̄ g ad f. sed proportio e ad f est eadē proportioni b ad a: et proportio g ad f eadem proportioni d ad c vt facile per primam huius cognoscere potes: igitur proportio b ad a scđi ad primū minor est q̄ proportio d ad c quarti ad tertiū. qđ erat demōstrādū.

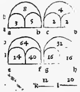
12 ¶ Si fuerit primi ad scđm proportio maior q̄ tertii ad quartum: erit primi ad tertiū maior q̄ secundi ad quartum.



¶ Sint vt prius q̄ttuor numeri: a primus. b scđs. c tertius. d quartus: et sit a ad b proportio maior q̄ c ad d. dico maiorem esse proportiōem a ad c primi ad tertiū: q̄ b ad d secūdi ad quartū. duco eni a in b

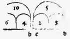
er prouenia e. et a in se et proueniat f. et in d et proueniat g. et in c et proueniat h. per septimam huius que proportio a ad b: ea est f ad e. et que c ad d: ea h ad g. deinde duco b in c et proueniat k: eritque per octauam huius h ad k sicut f ad e. at proportio f ad e que equatur proportioni a ad b: est maior proportione c ad d. ergo et proportio h ad k eadem proportioni f ad e maior est proportione h ad g. cum h ad g equetur c ad d. ergo per decimam k minor est g. et quia f ad e ut h ad k: erit per tertiam ut f ad h: ita e ad k. et quia g probatus est minor k: ergo per secundam partem none minor erit proportio e ad g quam e ad k. sed e ad k per octauam huius adequatur proportioni a ad c primi ad tertium: et e ad g proportioni b ad d secundi ad quartum. Est igitur proportio primi ad tertium maior quam secundi ad quartum quod proponitur.

¶ Si fuerit proportio totius ad totum maior quam detracti ad detractum: erit residui ad residuum proportio maior quam totius ad totum. 13



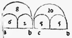
¶ Sit a b totum et ab eo detractus a et residuus b. sit item c d aliud totum et ab eo detractus c et residuus d. sitque totius a b ad totum c d proportio maior quam a ad c. dico b ad d residui ad residuum maiorem esse proportionem quam a b ad c d totius ad totum. duco enim a b in a et in b et proueniat e f cuius detractus sit e et residuus f. et duco idem a b in c et in d et proueniat g h: cuius g sit detractus et residuus h. Item ducatur a in c d et proueniat k: substrahaturque k ab toto g h et relinquatur l. cum enim per nonam primi quod fit ex ductu alicuius numeri in omnes partes alicuius totius: equum sit ei qui fit ex ductu illius numeri in eundem totum: totus e f equabitur ei quod fit ex ductu a b in seipsum a b. et cum idem a b ductus in a produxerit e detractum e f. per septimam huius que proportio a b ad a: eadem erit e f ad e. et eadem ratione que a b ad b: eadem e f ad f. et que a b ad c d: eadem e f ad g h. et ut c d ad c: ita g h ad g. et g h ad h: ut c d ad d. et cum duo numeri scilicet totus a b et a detractus: ducti sint in eundem c d: et produxerit numerus a b numerum g h et a numerum k: per octauam que proportio a b ad a: eadem est g h ad k. sed et cum e producatur ex a in a b: et k ex a in c d. per septimam quam proportio a b ad c d: eadem erit e ad k. quare ut e f ad g h: ita et e ad k detractus ad detractum. per quintam igitur ut e f ad g h: ita f ad l residuus ad residuum. et cum e ad g sit proportio que a ad c: erit proportio e ad g minor quam e ad k. quare per decimam k minor est g. igitur et l qui constabit ex h et differentia k ad g: maior erit h. igitur per eandem decimam proportio f ad h minorem numerum maior est quam ad l. at proportio f ad l probata est eadem proportioni e f ad g h: quare et proportioni a b ad c d totius ad totum. Est igitur proportio f ad h: que est eadem proportioni b ad d residui ad residuum: maior proportione a b ad c d totius ad totum. quod est propositum.

¶ Si vero detracti ad detractum fuerit proportio maior quam totius ad totum: erit residui ad residuum proportio minor quam totius ad totum. Ex his quoque perspicuum euadit si fuerit proportio residui ad residuum sicut detracti ad detractum: proportionem detracti ad detractum esse tanquam totius ad totum. 14



¶ Sit a b aliquis totus numerus et ab eo detractus a et residuus b: et c d alter totus et ab eo detractus c et residuus d. sitque a ad c maior proportio quam a b ad c d. dico b ad d minorem esse proportionem quam a b ad c d. quia enim a ad c est proportio maior quam a b ad c d: per vndecimam huius econtra minor erit proportio c ad a quam c d ad a b. cum itaque maior erit proportio c d ad a b totius ad totum quam c ad a detracti ad detractum. per precedentem igitur maior est proportio d ad b residui ad residuum quam c d ad a b totius ad totum. Intelligo igitur d primum numerum. b secundum. c d tertium. et a b quartum. quia d ad b maior est proportio quam c d ad a b: per vndecimam econtra minor est proportio b ad d quam a b ad c d. est itaque notum totius ad totum maiorem esse proportionem quam residui ad residuum et propositum. Correlarium patet: nam si totius ad totum maior esset proportio quam detracti ad detractum: ergo per precedentem residui ad residuum maior erit proportio quam totius ad totum. quare multo fortius residui ad residuum maior esset proportio quam detracti ad detractum. quod est contra hypothesim. Si autem totius ad totum minor sit proportio quam detracti ad detractum: ergo per presentem residui ad residuum minor erit proportio quam totius ad totum. quare et multo fortius residui ad residuum minor erit proportio quam detracti ad detractum. quod est iterum contra hypothesim. Cum itaque proportio totius ad totum neque maior neque minor esse possit quam detracti ad detractum: relinquitur eidem equalis.

¶ Si primi ad secundum fuerit proportio maior quam tertij ad quartum: erit primi et secundi ad secundum maior proportio quam tertij et quarti ad quartum: ad primum vero minor quam tertij et quarti ad tertium. 15

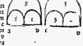


¶ Si a ad b maior proportio fuerit quam c ad d: dico primo a b ad b maiorem esse proportionem quam c d ad d. secundo a b ad a minorem esse quam c d ad c. Primum patet: nam si a b ad b et c d ad d ponatur equales: ut que proportio a b ad b: ea sit c d ad d. ergo permutatim per tertiam huius erit proportio a b ad c d: que b ad d. quare per quintam que proportio a b ad c d: ea erit et a ad c residui ad residuum. quare et que b ad d. et cum similes sint a ad c et b ad d: ergo permutatim per tertiam que proportio a ad b ea est c ad d. quod est contra hypothesim. Si autem ponatur a b ad b minor et c d ad d proportio maior: cum c d ad d sit proportio maior quam a b ad b ergo per duodecimam huius c d ad a b maior quam d ad b detracti ad detractum. ergo per decimamtertiam c ad a maior residui ad residuum quam c d ad a b. quare multo potius quam d ad b. cum itaque c ad a sit maior quam d ad b: ergo per vndecimam minor est a ad c quam b ad d. Intelligo ergo quattuor numeros: b primum. d secundum. a tertium. c quartum: quia maior est proportio b ad d quam a ad c: ergo per duodecimam maior est b ad a quam d ad c proportio: ergo per vndecimam minor a ad b quam c ad d. quod est contra hypothesim. Relinquitur igitur proportio a b ad b: cum neque equalis neque minor ut probatum est esse possit: maior esse proportione c d ad d. quod est primum.

Scđm patz:nam p immediate mõstratum a b ad b:maioz est ꝓpoztio q̄ c d ad d.ergo p duodecimam ꝓpoz.d a d ad c d:maioz q̄ b ad d detracti ad detractū.ergo p decimātertiā a ad c residui ad residuū maioz pzopoztio q̄ a b ad c d.quare itez per duodecimā a ad a b maioz q̄ c ad c d.per vndecimā igit̃ a b ad a:minoz q̄ c d ad c.quod est scđm ⁊ totum propositum.

15 ❡ Si inequales nũeri equalibus addãtur:erit ꝯpositoꝝ minoz ꝓpoztio q̄ adiūctoꝝ.

❡ Sint a c numeri inequales:b ⁊ d equales ⁊ cõpositi a b ⁊ c d:sitq̄ꝫ a maioz c.dico a ad c adiūcti ad adiūctum maiorem esse pzopoztiõem q̄ a b ad c d compositi ad compositum.nam cū b ⁊ d idem sint numerus:⁊ a sit maioz c:per nonam igitur maioz est pzopoztio a ad b q̄ c ad d.ergo per duodecimam maioz pzopoztio a ad c detracti ad detractū q̄ b ad d residui ad residuū.ergo maioz pzopoztio a ad c detracti ad detractum:q̄ a b ad c d totius ad totum.nam si a ad c:⁊ a b ad c d eadem esset pzopoztio:per quintam eadem eēt a ad c:⁊ b ad d.cuius oppositū demõstratum est.Si autez maioz eēt a b ad c d pzopoztio q̄ a ad c:ergo per decimātertiā esset ꝓpoztio b ad d residui ad residuū:maioz q̄ a ad c detracti ad detractū.cuius etiā oppositum modo monstratum est.relinq̄tur igitur a ad c pzopoztio maioz adiuncti scꝫ ad adiūctum:q̄ a b ad c d compositi ad compositum ⁊ propositum.



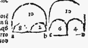
17 ❡ Si fuerit ꝓpoztio pzimi ad scđm maioz q̄ tertij ad quartū: fueritq̄ꝫ pzimus minoz tertio:erit secundus minoz quarto.

❡ Sint quattuoz numeri:a pzimus/b secūdus/c tertius/d quartus:sitq̄ꝫ a ad b pzopoztio maioz q̄ c ad d:et sit a minoz c.dico b esse minozem d.nam cū c sit maioz a:ergo per nonā maioz est ꝓpoztio c ad b q̄ a ad b.quare multo foztius c ad b maioz est pzopoztio q̄ c ad d.per decimam igitur d maioz est b.quod est propositum.



18 ❡ Cum fuerit pzopoztio pzimi ad scđm maioz q̄ tertij ad quartum:et compositum ex pzimo et secundo equale composito ex tertio et quarto:pzimum tertio maiozem esse necesse est.

❡ Sit a ad b maioz pzopoztio q̄ c ad d:et nũerus cõpositus a b equalis cõposito c d:dico a eē maiorē c.nam pzimo non erit equalis:q2 si a eēt equalis c:etiam b eēt equalis d per conceptiõem.alioquin si equalibus inequalia adderētur:tota fierent inequalia.quare equalis eēt ꝓpoztio a ad b:⁊ c ad d.q̄d est ꝯtra hypothesim.neq̄ꝫ erit c maioz a:et a minoz.nam per precedentem b scđs esset minoz d quarto per conceptionem igitur a et b duo minores simul sumpti minus sunt q̄ c d duo maiores simul.quod itez est ꝯtra hypothesim.relinq̄tur igitur a eē maiorem c ⁊ propositum.

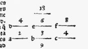


19 ❡ Si pzimus fuerit maioz tertio: ⁊ compositus ex pzimo ⁊ secundo equalis cõposito ex tertio ⁊ quarto:maioz erit pzopoztio pzimi ad scđm q̄ tertij ad quartum.

❡ Hec est ꝯuersa precedentis.Sit vt pzius a pzimus nũerus maioz c tertio:et cõpositus a b equalis cõposito c d.dico maiozem eē a ad b ꝓpoztionē q̄ c ad d.Nam q2 a ē maioz c:⁊ a b ⁊ c d equales:erit b minoz d.non enī esse potest b equalis d.nam ipsis a ⁊ c inequalibus additis:tota non fierent equalia.neq̄ꝫ est b maioz d nam per cõceptionem q̄d fieret ex a ⁊ b duobus maioribus plus esset.quod est ꝯtra hypothesim et cū sit maioz c:ergo p nonam pzopoztio a maioris ad d:maioz est q̄ pzopoztio c ad d.sꝫ cū b demõstratus sit minoz d:per decimam igitur a ad b maioz pzopoztio q̄ a ad d.quare multo foztius q̄ c ad d.quod est propositum.

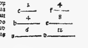
20 ❡ Si quotlibet numeroꝝ ad totidem alios fuerit vna pzopoztio:que vnius ad vnum ea oīm ad omnes pariter acceptos erit pzopoztio.

❡ Sint a/b/c q̄tlibet nũeri:et d/e/f totidem alij.et sit a ad d:et b ad e:⁊ c ad f pzopoztio vna.dico que pzopoztio a ad d:eādez eē totius a b c ad totū d e f.nam facile ex scđa huius cognoscis tres aīcedētes eque aut maiores aut minores aut equales ad suos ꝯsequētes.Si aūt sint eq̄ minores:quota pars vel ptes erit a ad d tota ps vel ptes erit b ad e:⁊ c ad f.ergo p quartā ⁊ quintā pzimi sub disiunctione quoties opoztuerit repetitas erit totus a b c tota ps vel ptes totius d e f:quota pars vel ptes a ad d.quare eadez erit ꝓpoztio a ad d:et totius a b c ad d e f.At si sint tres aīcedētes eque maiores quia q̄ ꝓpoztio a ad d:ea est b ad e ⁊ c ad f.ergo p pzimā huius q̄ ꝓpoztio d ad a:ea est e ad b ⁊ f ad c.q̄re q̄ta pars vel ptes d ad a:tota vel tote est e ad b ⁊ f ad c.per quartā igit̃ ⁊ quintā pzimi sub disiūctione q̄ties opus fuerit repetitas quota ps vel ptes est d ad a:tota ps vel ptes est d e f ad a b c.q̄re q̄ ꝓpoztio d ad a:eadē erit totius d e f ad totū a b c.ergo p pzimā huius q̄ ꝓpoztio a ad d:eadē totius a b c ad totum d e f.q̄d itez est ꝓpositum.Si xo singuli singulis sint equales:statim adiuuāte ꝯceptione si equales numeros equalibus addas totos fieri equales:idem efficies.est itaq̄ꝫ totum propositum notum.

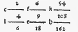


21 ❡ Si fuerint quotlibet numeri/aliiq̄ꝫ ſm eundem numerum ꝯiuncte in eadem ꝓpoztione sumpti:extremoꝝ eandem esse pzopoztionem necesse est.

❡ Hec declarat equā ꝓpoztionalitatem que est quoties sumptis quotlibet numeris ad alios totidē in cõtinua ꝓpoztionalitate se hn̄tibus:cõcludimus vt illoꝝ pzopoztio extremi ad extremum:ita hoꝝ extremi ad extremū pzopoztiõem esse.quid aūt sit cõtinua ꝓpoztionalitas:iam dictū est.et hec equa ꝓpoztionalitas bifariā formari potest p̄mo directe:ordineq̄ꝫ recto.vt si hunc in modum dixero:sicut a ad b:ita d ad e.et sicut b ad c:ita e ad f.q̄ sicut a ad c:ita d ad f.ꝓ quo eque pzopoztionalitatis modo ponitur presens ꝓpositio. Scđo xo format̃ indirecte ꝯuersoq̄ꝫ ordine.vt si dixero que ꝓpoztio a ad b ea est e ad f:et que b ad c ea d ad e.etiā que ē a ad c:ea est d ad f.ꝓ quo quidē eque pzopoztiōalitatis

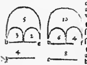


modo sequēs ponet̄ ꝓpositio. Sint ergo a b c quotlibet numeri in cōtinua ꝓportiōalitate τ directe se hñtes ad totidē d e f. vt sicut se hēat a ad b:ita d ad e. et sicut b ad c:ita e ad f:dico eādez eē ꝓportionem a ad c τ d ad f. nā qꝛ q̄ ꝓportio a ad b:ea est d ad e. erit ꝑmutatim ꝑ tertiā huius q̄ proportio a ad d ea est b ad e. et qꝛ q̄ proportio b ad c ea est e ad f:ergo ꝑ eādez tertiā ꝑmutatim q̄ ꝓportio b ad e:ea est c ad f. quare et que a ad d. cum itaqꝫ que proportio a ad d ea sit c ad f:ergo ꝑmutatim per tertiam que proportio a ad c:eadem est d ad f:quod est propositum.



¶ Si quotlibet numeri totidem alijs indirecte proportiōales fuerint: extremi quoqꝫ in eadem proportione proportionales erunt. 22

¶ Sit a ad b vt e ad f:et b ad c vt d ad e ꝯuerso ordine proportionales:dico a ad c vt d ad f. Duco enī d in e τ in f:et ꝓueniāt g h:et e in f. et prouenit k. per septimā hui⁹ q̄ proportio e ad f eadem est g ad h quare τ que a ad b:eadem est g ad h. et qꝛ d et e multiplicāt f:ꝑ octauā q̄ proportio d ad e:ea est h ad k q̄re τ q̄ b ad c. et qꝛ g fit ex d in e:et k ex e in f:et idē k ꝑ octauā primi alternatim fit ex f in e: ergo per octauā huius q̄ proportio d ad f:ea est g ad k. At ꝑ p̄cedētem qꝛ vt a ad b:ita g ad h. et vt b ad c:ita h ad k. ergo vt a ad c:ita g ad k. et cū proportio g ad k monstrata sit eadez proportioni d ad f:erit igitur vt a ad c:proportio d ad f. quod erat demonstrandum.



¶ Si fuerit primus ad secūdum:sicut tertius ad quartū. Itēqꝫ primus ad quintum sicut tertius ad sextum:erit sicut primus ad scdm̄ τ quintū:ita tertius ad quartum et sextum. 23

¶ Sit p̄mus nūerus a:scdꝰ b:tertius c:quartus d:quītus e:sextus f. sitqꝫ a ad b:sicut c ad d. et a iterū ad e sicut c ad f:dico vt a ad totū b e:ita c ad totū d f. quia enī a ad b sicut c ad d erit per primā hui⁹ vt b ad a:ita d ad c. erūt igit̄ ꝯ... ꝯe proportiōales vt b ad a:ita d ad c. vt a ad e:ita c ad f. q̄re ꝑ vicesimā primam vt b ad e:ita d ad f. ergo ꝑ sextam huius erunt ꝯiūctim vt b et e ad e:ita d et f ad f:per primā igitur hui⁹ vt e ad b e:ita f ad d f. qꝛ ergo vt a ad e:ita c ad f. et vt e ad b e:ita f ad d f. ergo ꝑ vicesimā primam vt a ad b e:ita c ad d f quod est propositum.



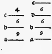
¶ Si fuerit primus ad secundum sicut tertius ad quartū fueritqꝫ primus maximus: numerus compositus ex primo τ quarto maior erit numero cōposito ex scdo τ tertio 24

¶ Sit a b primus numerus:c secūd⁹:d e tertius:f quartus. sitqꝫ vt a b ad c:ita d e ad f. et sit a b illorū quattuor numerorū maximus. dico compositum ex a b et f:maiorem esse composito ex c et d e. cū enim a b sit maximus est maior c secūdo:quare per scdam huius d e maior f quarto. et cū vt a b ad c:ita d e ad f. ergo ꝑmutatim per tertiam huius vt a b ad d e:ita c ad f. sed cū a b sit maxim⁹ per hypothesim est maior d e. ergo per secūdam huius et c maior f. est itaqꝫ f illorū minimus. esto ergo b differentia a b ad c et e differentia d e ad f. qꝛ sicut a b ad d e:ꝓbatus est c ad f. τ a adequatur c. τ d equatur f. ergo q̄ ꝓportio a b ad d e ea est a ad d detracti scꝫ ad detractum. ergo per quītaz huius vt a b ad d e:ita b ad e residuus ad residuū. q̄re ꝑ scdam huius cū a b sit maior d e:etiā b est maior e. sunt itaqꝫ b et f maius d e. quare iterū a b et f maius c et d e. at a et b simul per cōem cōceptum equātur toti a b. est itaqꝫ compositus ex a b et f primo et quarto maior composito ex c et d e secūdo τ tertio. qđ est propositum.



¶ Si fuerint quattuor numeri ꝓportionales: quod sub extremis continetur equale est ei quod producitur ex medijs. quod si producta fuerint equalia:erunt et numeri proportionales. 25

¶ Id sub extremis contineri dicitur qđ ex extremo in extremum producitur. Sint a b c d quattuor numeri proportiōales:ita vt q̄ proportio a ad b:ea sit c ad d. dico primo qꝫ fit ex a i d qđ sit e equale eē ei quod fit ex b in c quod sit f. Secundo si quod fit ex a in d:equale sit ei qđ fit ex b in c numeros illos esse proportionales. Primum patet:τ vt dictum est ex ductu a in d fiat e:et ex ductu b in c fiat f:quos dico esse equales. Duco enim iterū a in b τ proueniat g. erit per septimam huius g ad e vt b ad d. sed et quia ex a in b prouenit g alternatim ex b in a prouenit g. et etiam ex b in c prouenit f. ergo iterū per septimam g ad f vt a ad c. et quia vt a ad b ita c ad d: ergo permutatim per tertiam vt a ad c:ita b ad d. quare g ad f vt b ad d. et probatus est etiam g ad e vt b ad d quare e et f quorū ad g eiusdē numerum est propoitio vna:adinuicem sunt equales. quod est primum. Preterea dico si e et f adinuicem sunt equales:a b c d esse proportionales. nam cū e τ f sint equales:ipsius g ad eos est propoitio vna. et quia vt dictum est g ad f vt a ad c:et g ad e vt b ad d:erit a ad c vt b ad d. ergo ꝑmutatim per tertiam a ad b vt c ad d qđ est numeros a b c d:esse adinuicem proportionales:et secūdum.



¶ Tribus numeris proportiōalibus q̄ sub extremis continetur/ quiqꝫ ex medio in se ꝓducit̄ sunt eq̄les. Qꝫ si illi eq̄les fuerint:tres q̄qꝫ numeri erunt ꝯtinue ꝓportiōales. 26

¶ Sint a b c tres numeri cōtinue proportiōales:dico p̄mo qđ fit ex a in c:equale esse ei qđ fit ex b in se. Scdo si qđ fit ex b in se:equale sit ei qđ fit ex a in c tres numeros a b c eē cōtinue proportiōales. Primam partem probas per primam partem p̄cedentis po... b bis aut quēcunqꝫ numerum vt d equalem b. Et scdam partem per p̄cedentis secūdam partem:...c vt demōstretur est difficultas.

¶ Si fuerit proportio primi ad secūdum maior q̄ tertij ad quartum:qui ex primo in quartum producit̄:maior est producto ex secundo in tertium. Qꝫ si ꝓductus ex p̄mo in quartum sit maior:et proportio primi ad secundum maior erit. 27

¶ Sit a ad b ꝓportio maior q̄ c ad d. dico p̄mo q̄d fit ex a in d maius esse eo q̄d fit ex b in c. Secundo si q̄d fit ex a in d maius est eo q̄d fit ex b in c ꝓportionē a ad b maiorem esse ꝓportione c ad d. Primū patet et duco a in d et ꝓueniat e et b in c et ꝓueniat f: dico e maiorem esse f. Duco p̄terea b in d et fiat g. quia g̃ a in d producit e et b in d producit g: ergo per octauam huius q̄ proportio a ad b ea est e ad g et q̄ f fit ex b in c et g ex b in d: per septimā huius q̄ proportio c ad d ea est f ad g. mōstratū est igitur ut que ꝓportio a ad b: ea sit e ad g. et que c ad d: ea sit f ad g. At ꝓportio a ad b posita ē maior ꝓportiōe c ad d: ergo proportio e ad g maior est proportiōe f ad g. ergo per nonā huius e maior est f q̄d est p̄mū. Econuerso dico si e est maior f ꝓportionē a ad b maiorem esse proportiōe c ad d. Nam quia e est maior f: per nonam maior est proportio e ad g q̄ f ad g. At ꝓportio e ad g ea est q̄ a ad b. et proportio f ad g ea q̄ c ad d ut ostensum est. igit̄ proportio a ad b maior ꝓportiōe c ad d q̄d est scd̄m atq̄ totū ꝓpositū.

28 ¶ Positis duobus numeris an sit tertius cū illis continue ꝓportionalis: perscrutari.

¶ Datis ergo duobus nūeris ponatur eoꝝ quilibet quē voles secūdus: quē duc in seipm̄: si reliquus ꝓductum scd̄m aliquē numeret numerus scd̄m quē ꝓductū numerabit erit tertius nūerus in ꝯtinua proportionalitate ipsis per vicesimamsextam adiungēdus. Sin reliquus ꝓductum s̄m aliquē numerū non numerabit: per eādem nullus ipsis adhibebitur ꝯtinue proportionalis.

29 ¶ Datis trib⁹ nūeris an sit tertius ad aliquē s̄m ꝓportiōem p̄mi ad scd̄m: īuestigare.

¶ Eadem facilitate hec pateat. nam datis tribus numeris duc secūdū in tertiū: et si primus numeret ꝓductum s̄m aliquem: is s̄m quem productum numerat est per vicesimāquintam ad quem tertius ut primus ad secūdum se habet. At si primus productum s̄m aliquem non numeret per eādem vicesimā quintam nullus tertio in proportione primi ad scd̄m adiungetur.

¶ Secundi elementoꝝ arithmetices Jordani finis.

11 Numerus primus dicitur: qui non habet partem p̄ter vnitatem. Compositus vero qui habet alium numerum ipm̄ numerantem. Cōmensurabiles siue cōicātes vocātur: quos cōiter aliquis nūerus numerat. Cōtra se p̄mi autē dicūtur: qui a nullo cōiter numerātur excepta sola vnitate. Termini ꝓportionis dicūtur numeri minimi: inter quos inuenitur illa ꝓportio

1 ¶ Omnis numerus primus: ad oēm quem non numerat est primus.



¶ Sit a quicūq̄ numerus primus: dico a ad quēcunq̄ numeꝝ quē numerat esse cōmensurabilē atq̄ cōicantē et ipm̄ et quēcunq̄ alteꝝ quē non numerat esse ꝯtra se primos. Primū patet nā si a aliquem numerū numerat illū s̄m seipm̄ aliquoties sumptum numerabit: quare ipe a seipm̄ et alteꝝ nūerabit: et it utrq̄ per diffinitionem cōmensurabilis atq̄ cōicans ad alteꝝ. Scd̄m patet: nam si a aliquem numerum non numerat nullus numerus utrūq̄ cōiter numerabit: alioquin numeraret a: et a nō esset primus. quod est ꝯtra hypothesim. ꝑ diffinitionem igitur a et numerus quem non numerat sunt ꝯtra se p̄mi/ et a primus ad illum quod est scd̄m.

2 ¶ Omnis numerus compositus: ab aliquo primo numeratur.



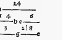
¶ Sit a quicūq̄ numerus compositus ꝓductus ex b in c. aut ergo b aut c est primus: et sic de eo h̄etur propositum. aut uterq̄ est cōpositus. q̄d si sic: fiat ergo b ex d i e: si iteꝝ uterq̄ d et e sit compositus: fiat iteꝝ d ex f in g. si iteꝝ uterq̄ coꝝ est compositus: hac rōne in infinitum numeri decrescent. q̄d est cōtra petitionem et impossibile: nisi deueniatur tādem ad numerum quem nullus alius numerabit. deueniemus igitur tādem ad aliquem numerum quez nullus alius numerabit et ꝓpter hoc primū: qui cum erit pars partis: ergo et per vicesimamtertiam primi erit et ps totius. quare per diffinitionem partis numerabit ipm̄ totum quod est propositum

3 Omnis numerus aut est primus: aut a primo numeratur.



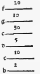
¶ Nam omnis numerus aut est primus aut compositus. atqui per precedentem omnis numerus cōpositus a primo numerat̄. igit̄ oīs numerus aut est p̄mus aut a p̄mo numeratur. q̄d intēdit ꝓpositio

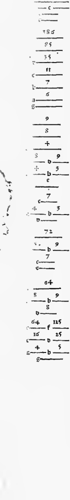
4 ¶ Si aliquis numerus primus numerum ex duobus ꝓductum numeret: necesse est eundem alterum eorum numerare.



¶ Sit a numerus ꝓductus ex b in c: quē numeret numerus primus d scd̄m e: dico numerū primū d numerare alteꝝ duoꝝ b aut c. Et esto non numeret b: dico ipm̄ nūerare c. Intelligo enī primū numerū d: scd̄m b: tertium c: quartū e. quia q̄d cōtinet̄ sub extremis d et e: equū est ei q̄d cōtinetur sub mediis b et c. ergo per secūdam partem vicesimequinte secūdi: d b c e sunt proportionales. ut que proportio d ad b: ea sit c ad e. si ergo b fuerit maior d: etiā et e maior c. ut ex demōstratiōe secūde scd̄i cognoscitur. Detractis ergo quoties fieri poterit d et c de b et e relinquantur f et g. eritq̄ per tricesimam primi ut quota pars vl' partes f relicta sit d: tota pars vel partes g sit c. q̄ si f relicta sit pars d: cū d sit nūerus primus f est vnitas. quota ergo vnitas est in d: tota pars g est in c. ergo per septimā primi quota pars vnitas est in g: tota pars d erit in c. numerabit igitur d ipm̄ c. At vero si f relictus sit partes d: est vnitates ut ostensum est: et tote partes erit g ipius c. capiam ergo vnā vnitatem ab f que sit h: et vnā partem ab g que sit k: et argumentabor ut prius per septimam p̄mi. quota pars h vnitas est ad d: tota ps est k ad c. ergo per septimā primi q̄ta pars h ad k: tota d ad e. quare iteꝝ d numerat c. At vero si d maior est b per scd̄az scd̄i: c est maior e. et q̄ q̄ ꝓportio d ad b eadē est c ad e: g̃ ꝑ primā scd̄i etiā que ꝓportio b ad d: eadē erit e ad c. quare quota pars vl' partes b est ad d: tota ps vel p̄tes e ad c. Diuido g̃ d et e in illas







partes: manifestū est enī cum d sit numerus primus/ unā partiū b eē unitatē. capio ergo unā partiū b que sit f: et unā partiū e q̄ sit g: q̄a igit̃ quota pars f unitas est d: tota pars g est ipsius c: ergo per se= cundā primi quota pars f unitas ad g: tota pars d est ad e: numerabit igit̃ d ipsū c q̄d iterū ē ꝓpositū

¶ Si numerū ex duobus ꝓductū tertius numeret: ide alteri illoꝝ erit cōmēsurabilis 5
¶ Sit a numerus ex b in c ꝓductus quē numeret d: dico d alteri numeroꝝ b aut c esse cōmensurabi lem. nam aut d est primus: aut cōpositus. si primus: ergo per p̄cedentē alterū eoꝝ numerat / quare al= teri eoꝝ erit ꝯmēsurabilis. si cōpositus: ergo per secundā huius ab aliquo primo numerat̃ d: qui sit e. q̄a e numerat d: numerabit etiā per vicesimā tertiā primi a: quare e per p̄cedentē numerabit b aut c et cū etiā cōiter numeret d: sunt per diffinitionē d et alter duoꝝ b aut c quos cōiter e idem numerus numerat / cōmensurabiles: quod intenditur.

¶ Sūptis quotlibet numeris primis: diversū ab illis numerū primū esse necesse est. 6
¶ Sint a b c quotlibet numeri primi: dico alterū ab ipsis esse. Duco enī numerū primū in secūdū et ꝓveniat d: et tertiū in ꝓductū et ꝓveniat e: et si esset quartus: ducerē ipsū in ꝓductū e: et ita deinceps et quia priores semꝑ erūt partes partiū ultimi ꝓducti: ergo per vicesimā tertiā primi et diffinitionē: oēs illi numeri primi numerabūt ultimū ꝓductū: cui addo unitatem: et sit totus ꝓductus f: qui aut est primus sicq̄ cōstabit ꝓpositū. aut cōpositus: qui si fuerit cōpositus: per secundā huius ab aliquo pri mo numerat̃ qui sit g. et cum g sit primus et nō sit aliq̄s p̄dictoꝝ: nam si aliquis p̄dictoꝝ: numeraret f cum numeret detractū e ut ostensū est: per duodecimā primi numeraret residuū: numer⁹ scʒ unita= tem / quod est impossibile: constat igit̃ aliū ab ipsis esse numerū primū.

¶ Si fuerint duo numeri ꝯtra se primi: q̄cūq̄ numerat alteꝝ est ad reliquū primus. 7
¶ Sint a et b ꝯtra se primi et c numeret a: dico b et c esse ꝯtra se primos: alioquin si c numerat b aut alius quicūq̄ b et c: cum idem per vicesimā tertiā primi numeraret a: nō essent a et b contra se primi quod est contra hypothesim.

¶ Quicūq̄ numerāt numeros contra se primos: et ipsi sunt adinvicem primi 8
¶ Sint a b numerātes c d numeros cōtra se primos: a quidē c et b ipsū d: dico a b eē cōtra se primos nam si sint cōmēsurabiles sit e eos cōiter numerās: q̄a ergo e numerabit a etiā per vicesimā tertiā pri mi numerabit c. et q̄a e etiam numerat b per eādē numerabit d. nō sūt igit̃ c d contra se primi: q̄d est contra hypothesim.

¶ Numerus cōpositus ex duobus numeris ꝯtra se primis: ad utrūq̄ illoꝝ est p̄mus 9
¶ Sint a et b numeri cōtra se primi: et cōponāt c: dico c ad utrūq̄ eoꝝ esse primū. nam si est cōmensu= rabilis uni eoꝝ ut nūero a: numeret igit̃ eos aliq̄s numerus ut d: q̄a ergo d numerat c et a detractū: ergo per duodecimā primi d etiā numerat b residuū. nō sūt igit̃ a b ꝯtra se primi / q̄d est cōtra positū.

¶ Si duorum numerorum uterq̄ ad tertium fuerit primus: et qui ex ipsis producit̃ ad eundem erit primus. 10
¶ Sint a b duo numeri quoꝝ uterq̄ ad c sit p̄mus: et sit d ꝓductus ex a in b: dico d esse p̄mū ad c. nā si c et d essēt cōmēsurabiles: aliq̄s eos ut e cōiter numeraret: qui cū numeraret d ꝓductū ex duob⁹ scʒ a et b: ꝑ quartā hui⁹ cōicabit alteri eoꝝ: q̄d ꝑ septimā hui⁹ ē īpossibile. nō itaq̄ c et d sūt ꝯmēsurabiles

¶ Si fuerit duo numeri ꝯtra se p̄mi: q̄ ex alt̃o ī se ducto ꝓducit̃ ad reliquū erit p̄m⁹ 11
¶ Sint a et b ꝯtra se p̄mi: et a in se ductus ꝓducat c: dico c esse p̄mū ad b. capio d equale a: et q̄a uter q̄ a et d est primus ad b: ergo per p̄cedentē qui fit ex a in d est p̄mus ad b. sed qui fit ex a in se: equat̃ ei qui fit ex a in d: igitur qui fit ex a in se est primus ad b. quod est propositum.

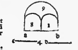
¶ Si fuerint duo numeri contra se primi: qui ex eis in se ꝓducent̃ erūt adinvicē pri= mi. Q̄ si idem in ꝓductos ducant̃: et qui inde ꝓducētur erunt cōtra se primi. Sicq̄ deinceps si principia in ꝓductos ducantur: ꝓducti erunt incommensurabiles. 12
¶ Sint a et b cōtra se primi: ducat̃q̄ a in se et fiat c: et b in se et fiat d: dico c d esse cōtra se primos. Item dico si a ducat̃ in c et fiat e: et b in d et fiat f: similiter e f eē incōmēsurabiles atq̄ cōtra se primos. et si iterū duxeris a in e et b in f / qui ꝓducent̃ esse cōtra se primos: et hoc quoties feceris ita evenire. Primū patet: nam per p̄missā quia a est primus ad b et c fit ex a in se: per p̄cedentem c est p̄mus ad b et quia c est primus ad b et d fit ex b in se: per eādem c est primus ad d quod est primū. Preterea q̄a uterq̄ a et c est primus ad b: igitur per decimam e qui ex ipsis producitur est primus ad b. quia igit̃ e b sunt contra se primi: et d producitur ex b in se: per precedentem e etiā est primus ad d. cum itaq̄ uterq̄ duorum b d sit primus ad e ut monstratum est: igitur per decimam f qui fit ex ipsis scilicet ex b in d est primus ad e. et ita q̄ntūcunq̄ series ꝓcedat cōclude. et hoc est scd̄m. ¶ Ex huius prima par= te cognoscit̃: tetragonos quoꝝ latera incōmensurabilia sunt esse incōmensurabiles. et ex secūda: tes seras incōmensurabiles esse quacū latera sunt incōmensurabilia. et cōtra demōstrare promptū est si latera sunt cōmensurabilia: tetragonos et tesseras esse cōmensurabiles. Ut sint a b latera cōmensu= rabilia et c tetragonus a: et e eius tessera. d tetragonus b: et f eius tessera: quia a b sūt cōmensurabi les: ergo ē nūerus cōiter eos numerās qui sit g: quia g numerat a: ergo per vicesimā tertiā primi nu= merat c et e: et quia etiā g numerat b: per eandē vicesimā tertiā numerat d et f. sūt igit̃ tetragoni c d: itidē et tessere e f adinvicē cōmensurabiles. sed de his hactenus: quoꝝ in sexto huius ubi de numeris tum quadratis tum cubis agetur exactissime determinatio futura est.

13 ¶ Si duo numeri ad aliquos duos vterqꝫ ad vtrunqꝫ fuerit primus: ⁊ qui ex eis producitur ad productum ex reliquis erit primus



¶ Sint a b primi ad c et primi ad d: ⁊ ex a in b fiat e ⁊ ex c in d fiat f. dico e et f esse inter se primos. nã qꝛ vterqꝫ numerus a ⁊ b est primus ad c per decimã huius e est primus ad c. et qꝛ iterũ vterqꝫ a ⁊ b est primus ad d: ergo per eandẽ e est primus ad d. est itaqꝫ vterqꝫ duorum c d mõstratus primus ad e: quare per eandem decimã f productus ex illis est primus ad e: quod erat demõstrandum.

14 ¶ Si fuerint duo numeri contra se primi minorqꝫ de maiore aliquoties detrahatur: aut relinquetur vnitas aut numerus ad detractum primus



¶ Sint a b et c cõtra se primi: a b maior/ c minor. detrahaturqꝫ c de a b aliquoties: sitqꝫ substractus a et residuũ b. dico b aut esse vnitatẽ aut esse numerũ primũ ad c. Nam si b sit cõmensurabilis c: sit d illorũ cõis mensura. qꝛ d numerat c p vicesimãtertiam primi etiam numerabit a. et qꝛ etiam numerat b per nonã primi numerabit totum a b. nõ erunt igitur a b ⁊ c contra se primi: qđ est contra hypothesim.

15 ¶ Cum fuerint duo numeri contra se primi et minore de maiori quoad põt detracto: residuũ a prius detracto detrahatur cõtinua hoc pacto detractione facta: vnitatẽ relinqui necẽ est. ꝙ si vnitas residua fuerit: positos nũeros incõmẽsurabiles eẽ ꝯueniet.



¶ Sint a b duo numeri cõtra se pmi: a maior et b minor: detrahaturqꝫ b ab a quoties id fieri põt et relinquatur c qui detrahatur quoties põt a nũero b. ⁊ ita continue hoc pacto detractio quoad põt. dico primo tandẽ relictũ iri vnitatẽ. dico scđo ꝙ si hoc pacto cõtinuata detractiõe relicta sit vnitas datos nũeros esse cõtra se primos. Primũ pꝫ. nam detrahatur b de a quoties põt et relictũ residuũ sit c: ipm c relictũ minus ẽ b. ⁊ p precedentẽ aut est vnitas aut nũerus primus ad b. si vnitas cõstat qđ ꝓponitur. si nũerus pmus ad b detraho ipm quoties possuꝫ ab ipso b ⁊ relinq̃tur minꝰ c qđ sit d. quod qꝫ deĩd per pcedentẽ sit: est vnitas aut nũerus primꝰ ad c. si nũerus pmus ad c ipm detrahã ab c: quare aut semp decrescet numerꝰ dando minorẽ ad primũ ſm exigentiã pcedẽtis: aut relinq̃tur vnitas qđ est primũ. Scđm pꝫ. nã si a et b sunt cõmẽsurabiles idẽ numerꝰ nũerabit totũ ⁊ detractũ. quare p duodecimã primi idẽ numerabit residuũ numerus scꝫ vnitatẽ qđ est ipossibile. qđ quidẽ vt clarius pcipias sic ꝯsidera. si a et b sint ꝯmẽsurabiles d: ergo eos cõiter numeret: substrahaturqꝫ b ab a quoties põt et reliquatur c si c sit vnitas cũ numerꝰ d numeret b nũerabit oẽm numeratũ ab b p 23 pmi: quare totũ detractũ ab a ⁊ nũerat etiã a vt positũ est. ergo p duodecimã primi d etiã numerabit residuũ scꝫ c: numerus scꝫ vnitatẽ qđ est ipossibile. ⁊ si c sit nũerꝰ qꝛ d nũerat totũ a et detractũ vt ꝓbatũ ẽ: ergo p duodecimã pmi d etiã numerabit c residuũ. detrahatur ergo quoties põt c de b ⁊ relinquatur e. si e est vnitas argumẽtare vt prius numerũ d numerare e vnitatẽ. si vero e sit nũerus consilr d ipsum numerabit. et sic ꝓcedẽdo habebis ꝙ qñcũqꝫ dabitur vnitas ipam d numerabit: qđ est ipossibile. Et ex hac demõstratione elicẽ si duoꝝ ꝯmẽsurabiliũ alter ab altero quoties põt substrahatur sitqꝫ residuus residuũ illis esse cõmensurabile.

16 ¶ Datis duobus numeris cõicantibus: maximũ eos numerantẽ inuenire. vnde manifestũ est ꝙ ois numerus duos quoscunqꝫ numerãs maximũ eos numerantẽ nũerabit



¶ Sint a b duo numeri cõicantes: a maior et b minor ꝓpositũ est maximũ numeꝝ ipsos numerãtem inuenire. Si eni b nũerat a: cũ b se etiã numeret ipse est maximꝰ eos numerãs. si autẽ b nõ numerat a detrahatur b ab a quoties põt et sit relictus c: q̃ si nũeret vtrũqꝫ ipse ẽ numerꝰ petitus. si nõ nũeret detrahatur ergo iterũ c ab b quoties põt et sit relictus d q̃ erit minor c. si numeret vtrũqꝫ b ⁊ a ipse ẽ petitus. at si nõ numerat qꝛ nõ decrescet numerus in infinitũ neqꝫ decumbet ad vnitatẽ: qꝛ per pcedentẽ a et b essent cõtra se primi tandẽ deuenietur ad aliquẽ qui aũ relictũ numeret quẽ ꝓpriũ habebimꝰ dico ipꝫ esse maximũ numeꝝ eos cõiter numerantẽ. nã si eo maior ponatur: accidet p duodecimã primi maiorẽ numerare minorẽ: qđ est ipossibile. Ex hoc correlariũ est notum. ponatur eni a b numeri cõicantes et b minor substractꝰ ab a quoties põt ⁊ relictus c: et c substractus ab b quoties põt ⁊ relictus d q̃ substractus ab c nichil relinquat: q̃ ideo erit maximus numerãs a ⁊ b per ꝓhẽm: et sit g cõiter numerãs a b. dico g nũerare d maximũ numerantẽ. si eni g sit idẽ numero d: cum ois numerus seipm numeret etiã de eo verum est propositũ. si est alius ab d nõ erit maior d. nã d nõ esset maximus numerus numerãs a b verũ potius g. erit ergo minor de necessitate: qui q̃a numerat b. ergo p vicesimãtertiam primi numerabit totum detractũ ab a. ⁊ cum etiã numeret a: per duodecimã primi numerabit residuũ c: ⁊ cum numeret c per vicesimãtertiam primi numerabit totum detractũ a numero b. et cum numeret b: ergo per duodecimã primi numerabit residuũ scꝫ d: quod est propositum.

17 ¶ Propositis quotlibꝫ nũeris adiuicẽ ꝯpositis maximũ eos cõiter nũerãtẽ reperire.

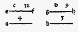


¶ Sint a b c quotlibet nũeri adinuicẽ ꝯpositi ꝓpositũ est maximũ numeꝝ eos nũerantẽ inuenire. Inuenio eni per pcedentẽ maximũ numerãtẽ a et b q̃ sit d. q̃ si numerat c ille ẽ qui petitur alioquĩ si dabis maiorẽ accidet p duodecimã primi minorẽ numerare maiorẽ. si aũt d nõ numerat c: qꝛ ergo q̃cunqꝫ numerat a b c nũerat a b. ⁊ q̃cunqꝫ nũerat a b p correlariũ precedẽtis numerat d maximũ numeꝝ eos numerantẽ. ergo d ⁊ c sunt ꝯmẽsurabiles. inuenio ergo p precedentẽ maximũ numeꝝ numerantẽ c ⁊ d q̃ sit e quẽ dico esse maximũ numerantẽ a b c. nã si sit quicũqꝫ alius maior e eos cõiter numerãs: is sit f. q̃a ergo f numerat a b p correlariũ precedẽtis numerat d maximũ eos numerantẽ. ⁊ q̃a numerat d et etiã c per positũ: ergo per idẽ correlariũ numerat e maximũ eos nũerantẽ. at f ponitur maior e. nũerat igitur maior minorẽ: qđ est ipossibile. relinq̃tur igitur e esse maximũ numerantẽ a b c et propositũ.



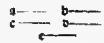
Quilibet duo numeri in sua proportione minimi: sunt contra se primi. 18

Sint a b duo nūeri in sua ꝓportione mīmi: dico eos esse contra se ꝑmos. nā si sint ꝯpositi sit cōis eoꝝ mēsura c q̄ nūeret a ſm d er b ſm e ꝑ septimā ſcdi q̄ ꝓportio d ad e ea est a ad b. at cū d sit minor a et e minor b non erant a ⁊ b in sua ꝓportione minimi: quod est contra positum.



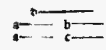
Numeri quilibet in sua proportione minimi numerant quoslibet in eadem propor tione sumptos minor minorē ⁊ maior maiorem equaliter. 19

Sint a et b mīmi in sua ꝓportione: a maior b minor: sintq̨ eiusdē proportionis c d: c quidē maior d minor. dico a numerare c et b numerare d equalr. nā q2 vt a ad b ita c ad d: ergo permutatī per tertiā secūdi vt a ad c ita d ad b. quota ergo pars vel ptes est a ad c tota pars vel ptes est b ad d. si tota pars constat ꝓpositū a equalr nūerare c ⁊ b numerare d. si tote partes ergo ꝑ tricesimā primi q2 toties erit a in c quoties b in d. et quota pars vel ptes a remāserint in c: tota pars vel ptes b remanebūt in d. substraho ergo quoties possum a de c ⁊ detractꝰ sit e et residuus f. similr substraho quoad possum b de d et detractus sit g ⁊ residuus h. q2 ergo a nūerat e: ⁊ b numerat g equalr atq̨ ſm eundē numerū. ergo per octauā ſcdi que proportio a ad b ea est e ad g: ergo ⁊ q̄ proportio c ad d totius ad totū: ea est e ad g detracti ad detractū. igitur ꝑ quintā secundi q̄ ꝓportio c ad d totius ad totum: ea est f ad h residui ad residuū. quare iterum q̄ proportio a ad b: ea est f ad h. at cum f et h relicta sint minora a ⁊ b: nō erant itaq̨ a et b in sua proportione minimi: quod est contra hypothesim. constat ergo quoscūq̨ in sua proportione minimos ceteros vt dictum est numerare.



Si fuerint duo numeri adinuicē primi ipsi erunt in sua ꝓportione minimi. 20

Sint a et b nūeri adinuicē primi: a maior b minor. dico eos in sua ꝓportione esse mīmos. nā si sint alij q̄ sint in illa ꝓportione mīmi: sint ergo illi c d: q2 ergo c d sunt in illa ꝓportione mīmi ꝑ ꝑcedentē numerabūt quoslibet in eadē ꝓportione minor minorē ⁊ maior maiorē equalr. nūeret ergo c numeꝝ a ſcdm e ⁊ d numeret b secundū eundem numerū e manifestū est q2 e numerabit a et b: quare nō sunt a ⁊ b contra se primi: quod est contra hypothesim.



Positis duobus numeris contra se primis si alter ducatur in numeꝝ quē reliquus nō numerat productus quoq̨ ab eodem non numerabitur. 21

Sint a b numeri contra se primi et a ducatur in c ⁊ proueniat d et b nō numerat c: dico b nō numerare d. Si ergo b numeret d: numeret ergo ipsum ſm e intelligo primū numerū a: secundū b: tertiū e et quartū c. q2 ergo qđ cōtinetur sub extremis a c equū est ei quod cōtinetur sub medijs b e. ergo per vicesimāquintā secundi que proportio a ad b: ea est e ad c. q2 ergo a b sunt primi per precedētem sunt in sua proportione minimi: ergo per ante precedentē a numerabit e: ⁊ b numerabit c equaliter: quod est contra hypothesim. positū enim erat b nō numerare c.



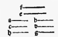
Si numerum a duobus productum tertius numeret: idem alterum eorum numerabit aut erit vtriq̨ commensurabilis. 22

Sit a numerus productus ex b in c quē d numeret: dico d numerare b aut c aut esse vtriq̨ cōmensurabilem. Si enī alteri fuerit incōmensurabilis vt verbi causa b: cū ergo b et d sint contra se primi ⁊ b in c producat a: ergo per precedentē si d nō numerat c neq̨ quidē d numerabit a. at positus est d numerare a. numerat igitur d alterū eoꝝ. Si itaq̨ vni fuerit incōmensurabilis necessario numerat alterū ideo vtriq̨ incōmēsurabilis eē nequit q̄ fit vt aut nūeret alterū aut vtriq̨ sit ꝯmēsurabilis ⁊ ꝓpositū.



Numeros minimos: ſm proportionē numeroꝝ assignatorū perscrutari. pateṫq̨ ex hoc maximū duos numeros cōiter numerantē: ſm mīmos illius ꝓportionis nūerare 23

Sint a b in aliqua ꝓportione: propositū est mīmos numeros ꝓportionis a ad b reperire. aut enim a ⁊ b sunt contra se primi et tunc per vicesimā huius illi sunt in sua ꝓportione minimi neq̨ alij q̄rendi sunt. aut sunt cōpositi ⁊ tunc per decimāsextam huiꝰ quero maximū numerū eos numerantē qui sit c nūeretq̨ a ſm d: et b ſm e. ꝑ septimā ergo ſcdi eadē est ꝓportio a ad b ⁊ d ad e. dico itaq̨ d et e esse mīmos nūeros in illa ꝓportione. si enī sint alij sint f ⁊ g: q2 f et g sunt mīmi in illa ꝓportione. ergo ꝑ decimānonā huius numerāt a b: maior maiorē ⁊ minor minorē ſm eundē numerū qui sit h. intelligo ergo quattuor nūeros: c primū: f secundū: h tertiū: et d quartū. q2 a cōtinetur sub extremis c d: ⁊ idē a sub medijs f h: ergo ꝑ vicesimāquintā secundi q̄ proportio c ad f ea est h ad d. ergo ꝑmutatī per tertiā ſcdi eadē est ꝓportio c ad h et f ad d. sed f positꝰ est mīor d: ergo et c minor h. tūc sic c est maximꝰ numerus numerās a b ꝑ hypothesim et h positus est etiā numerare a b: ergo h ꝑ correlariū decimesexte huius numerabit c maior scʒ minorē quod est īpossibile. nō dabūtur igitur alij ab ipsis d e in illa ꝓportione minimi quod est propositū: et in hoc etiam correlariū notum est.



Quilibet duo numeri minimos numeros sue proportionis maior minorē et minor maiorē multiplicantes: minimū ab ipsis numeratum producunt. Ex quo constat minimum quē duo numerant: quēlibet ab eis numeratū numerare. 24

Sint duo nūeri a b multiplicātes c d mīmos sue ꝓportionis maior minorē ⁊ minor maiorē: dico ipsos minimū ab ipsis numeratū ꝓducere. nā q2 sicut a ad b ita c ad d: ergo per vicesimāquintā ſcdi qui cōtinetur sub extremis a d equus est ei q̄ continetr sub medijs b c qui sit e quem dico esse minimū ab ipsis numeratū. Si enī sit alter esto ergo ipse f quē a ſm g ꝓducat et b ſcdm h. positis ergo ordine ſminis a b h g: q2 qui cōtinetur sub extremis a g equalr ei qui cōtinetur sub medijs b h. ergo per vice

simãquintã secundi q̃ proportio a ad b ea est h ad g: quare et q̃ c ad d. et q2 a ꝓducit e scdm d et idem a ꝓducit f scdm g. ergo ꝑ septimã secũdi q̃ proportio d ad g: ea est e ad f. at cũ c ad d sicut h ad g: ergo ꝑmutatim sicut c ad h: ita d ad g. quare sicut c ad h: ita e ad f. sed e numerat h per decimãnonã huius ergo et e numerat f: et f positus est minor e. numerat igitur maior minorē: quod est impossibile ꝛ propositum. Et ex modo demonstrationis patet correlarium.

25 ❡Propositis quotlibet numeris: minimũ ab eis numeratũ inuestigare.

❡Sint a b c d quotlibet numeri: quoꝝ proponit̃ minimũ ab eis numeratũ inuenire. quero primo minimũ quem numerãt a et b: q̃ si a numerat b certũ est b esse minimũ ab eis numeratũ. et si a et b sunt cõtra se primi duco vnũ in alterũ. et q2 illi sunt p̃mi: ergo ꝑ vicesimã hui⁹ erũt in sua ꝓportione mimi ꝑ precedentē igit̃ ꝓductus ab ipsis erit mĩmus quē numerabũt. at si ipsi fuerint cõicantes sumo per p̃cedentē minimũ quē numerãt q̃ sit e: et consit̃r capiã minimũ quē numerãt c e q̃ sit f et minimũ quē numerãt d f q̃ sit g quē dico eē minimũ numeꝝ quē numerãt a b c d. numerabunt enĩ eum ꝑ 25 primi. at q̃ nõ numerẽt minorē pꝫ. nã si sit dabilis nũerus minor g quē numerãt a b c d sit ille h: q2 ergo a b numerãt h. ergo ꝑ correlariũ p̃cedẽtis e mĩmus ab eis numerat⁹ nũerat h. et q2 c ꝛ e numerãt h: ergo ꝑ idē correlariũ f mĩmus ab eis nũeratus nũerat h. et q2 f nũerat h et d posit⁹ est etiã ipsum nũerare ergo per idem correlariũ g minimus ab f ꝛ d numeratus numerabit h. at h positus est minor g: numerat igitur maior minorē: quod est impossibile.

26 ❡Si minimũ numeꝝ a quotlibet numeratum aliquis primus numeret: eundē quoqꝫ aliquem illorum numerare necesse est.

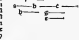
❡In duob⁹ numeris id facile ꝑpendit̃. Sint ergo a b duo nũeri: c mĩmus ab eis numerat⁹: et d nũerus p̃mus numerans c: dico d nũerare a vel b. numeret enĩ a minimũ numeratũ c scdm e: ergo per 24 hui⁹ e est vnus minoꝝ ꝓportiõis a ad b numerãs b. sic sic d numer⁹ prim⁹ nũerat e ꝓductũ a duob⁹ nũeris a et e. ergo ꝑ quartã huius d nũerat alterũ numeroꝝ a aut e. si a cõstat ꝓpositũ: si e idē. nã ꝑ vicesimãquartã numerabit b. In pluribus aũt consit̃r ostẽditur. Sint a b c quotlibet nũeri d mĩmus ab eis nũeratus: e nũerus p̃mus numerãs d: dico e nũerare a b aut c. capio enĩ fm exigentiã p̃cedẽtis mĩmũ numeꝝ quē numerãt a b q̃ sit f: et mĩmũ numeꝝ quē numerãt f c quē ex p̃cedẽti manifestũ est eē d et nũeret c mĩmũ d scdm g q̃ per 24. huius est vnus nũeroꝝ ꝓportionis f ad c et q̃ numerat f. Cum itaqꝫ e numerus p̃mus numeret d ꝓductũ ex duob⁹ numeris c g: ergo ꝑ quartã huius e nũerat alterũ numeroꝝ c g. si numerat c cõstat ꝓpositũ: si numerat g ergo ꝑ vicesimãquartã numerat f. q2 ergo f est mĩmus numer⁹ quē numerãt a b. nũeret ergo a minimũ f scdm h q̃ per sepe sumptã vicesimãquartam hui⁹ erit vnus mĩmoꝝ ꝓportionis a ad b et numerãs b. cum ergo e ꝓbatus sit nũerare f productũ ex duobus numeris a h: ergo per quartam huius numerat a aut h. si numerat a constat propositum. si h idē. nam h numerat b: quare e per vicesimãtertiam primi etiã numerabit b: et propositũ.





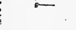
27 ❡Cum fuerint quotlibet numeri ad aliquem primi: et minimus quem numerant ad eundem erit primus.

❡Sint a b c quotlibet numeri primi ad d: sitqꝫ e mĩmus numer⁹ quē numerãt a b c: dico e esse primũ ad d. nã si d est cõmẽsurabilis ad e: ergo est aliq̃s numer⁹ eos cõiter numerãs q̃ sit f. Si enĩ f sit nũer⁹ p̃mus cũ numeret e: ergo ꝑ p̃cedentē nũerabit a b aut c. et cũ etiã nũeret d nõ sunt ergo a b c p̃mi ad d q̃d est contra hypothesim. at si f sit nũerus ꝯpositus ergo ꝑ scdam huius f ab aliquo p̃mo numeratur q̃ sit g: qui ꝑ vicesimãtertiã primi numerabit d et e: q2 ergo g est primus ꝛ nũerat e. ergo ꝑ precedentē nũerabit a b aut c et etiã numerat d. nõ sunt igitur a b et c primi ad d: quod est contra hypothesim.



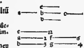
28 ❡Si sumatur minimus numerus quē numerant aliquot primi numeri assignati: aliũ ab illis numerum primũ: eundem numerare impossibile est.

❡Sit e mĩmus nũerus quē nũerãt a b c quotlibet nũeri p̃mi: dico nullũ ipsis p̃mũ aliũ ab ipsis nũerare e. nã si daret̃ aliquis vt d: q2 ipse nũeraret e. ergo ꝑ 26 nũeraret etiã a b aut c: q̃d est ꝯ hypothesim.



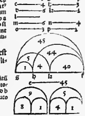
29 ❡Numerũ minimũ: propositarũ denoĩationum partes habentē inuenire.

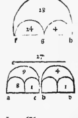
❡Si propositarũ partium vt verbi cã vnius secũde tertie quarte ꝛ sexte ꝓpositũ sit minimũ numeꝝ ptes illas hñtem reperire. capio a b c d nũeros partes illas denoĩantes quoꝝ mĩmus ab eis nũerat⁹ sit e: nũeret ergo a minimũ e scdm f: et b eundē scdm g: et c eundē scdm h: ꝛ d eundē e scdm k. alternatim ergo ꝑ octauã primi f g h k numerabũt e fm a b c d datos nũeros: erũt ergo in e partes denoĩate ab a b c d quē ꝛ dico esse minimũ in quo ptes ille reperiãtur. q̃ enĩ partes illas habeat: iam notũ est: sed si nõ sit mĩmus sit ergo ille l minor eo illas habẽs: ꝛ eius partes ab illis denominate sint m n o p. erunt ergo alternatim per octauam a b c d partes l denominate ab m n o p. nõ erat ergo e minimus quē numerabant a b c d. nam l ponitur minor: quod est contra hypothesim.



30 ❡Sumptis duob⁹ numeris contra se primis quorũ minore de maiori quoad potest detracto residua sit vnitas: multiplicem cuiuslibet eorum qui super alterius multiplicem: solam apponat vnitatem reperire.

❡Sint a b nũeri ꝯtra se p̃mi: a maior b minor: detractoqꝫ b de a quoties põt reliquat̃ vnitas: ꝓpositũ est dare mĩtiplicē ad a: sola vnitate multiplicē ad b supantē. detraho ergo q̃tũ possum b ptiale de totali a et sit totus detract⁹ a ptialis: q̃ quidē est idē aut mĩtiplex ad b. et sit relicta vnitas ꝛ addo ad b vnitatē q̃ sit d. et duco a totũ in b d ꝛ ꝓueniat e quē manifestũ est eē multiplicē totalis a. Deinde duco



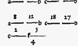




a partialē eundē scz aut multiplicē ad b in b d et pueniat f h quē manifestū est p 23 primi eē mltiplicē ad b ptiale. Deinū duco c vnitatē in b d et veniat h g q qz vnitas in quēcunqz numerū ducatur illū pducit est eq̄lis b d: sed b d supat b sola vnitate. ergo h g superat b sola vnitate. Hanc igitur demo q sit h g tūc aggregatꝰ f h est mltiplex ad b: sed aggregatꝰ f h superat totū f g sola vnitate h g. sed cū f g fiat ex ductu a partialis z c in b d equatur e q fit ex ductu a totalis in b d per decimā primi. at dictū est e eē multiplicē ad a z f h multiplicē ad b. igitur e multiplex ad a equalis quidē f g supat f h multiplicē ad b sola vnitate qd erat demōstrandū et propositū quo ad vnā partē. Sed rursum demōstrandū est dabilē esse multiplicē ad b q solā hz vnitatē super multiplicē ad a: aufero vnitatē ab b totali q sit d et duco b partiale in totalē a et proueniat c manifestū est e eē multiplicē ad a. et duco iterū b partialē in a partiali equali aut multiplice totius b et proueniat f g manifestū est f g esse multiplicē ad totū b. deinde duco b d in c vnitatē z fiat g h qui qz quicūqz numerꝰ in vnitatē ducatur seipsum pducit g h est equalis toti b quare totus f h est mltiplex ad b. Sed cū per nonā primi qd fit ex b ptiali in a c equetur ei q fit ex eodē b partiali in a et in c: z ille q fit ex b ptiali in a: et b totali in c solā vnitatē superaddat illi q fit ex b ptiali in a et in c. sequitur ergo q multiplex ad b scz f h q fit ex b partiali in a et b ptiali in c: solā addet vnitatē super e multiplicē ad a qui fit ex b partiali in a c: quod est secundū et totum propositū.

¶ Propositis duobus numeris cōtra se primis: multiplicē cuiuslibet eorū inuestigare cuius ad multiplicē alterius differētia sit dato numero equalis. 31

¶ Sint a b duo nūeri contra se pmi quorū cuiuslibet iubemur assignare multiplicē cuius dria ad multiplicē alteriꝰ sit dato nūero q sit c equalis. capio fm exigentiā precedētis multiplicē a q sit d et multiplicē b q sit e addēs super multiplicē a solā vnitatē z multiplico d per c numerū datū et proueniat f z e p eundē c et pueniat g. z qz tm̄ est c in e qūtum c in d et vnitatē per nonā primi z oīs nūerus in vnitatē seipm producit. ergo dria g ad f est nūerus datus c. et cū a sit pars d et d ps f: z silr b pars e z e pars g ergo p vicesimātertiā primi a est pars f et b ps g. quare f et g multiplices sunt ad a b int quos nūerus assignatꝰ est dria. et posses silr p pcedentē capere multiplicē a q supadderet vnitatē mltiplici ipius b. deinde pcedere vt dictū est. Ceterū si minor quoties pōt de maiore detractꝰ nō solā relinquat vnitatē sed vlterior fiat substractio quo minꝰ per pcedentē operari posses hoc mō poteris operari. Datis enī a b nūeris contra se pmis et c numero cui sit tapienda dria multiplicū equalis et detracto b ab a quoties pōt remaneat d et d detracto ab b quoties pt reliquꝰ sit e: z e detracto ab d quoties pōt maneat f et qz tandē per decimāquintā huius relinquetur vnitas sit ergo vt detracto f ab e quoties poterit relinquatur vnitas. si ergo multiplex a debet addere supra multiplicē b sumo alterū extremorū qui est in situ ipari ab a vt f et sumatur h multiplex eius q addat vnū super multiplicē e z i quo sit f fm g ducaturqz g in d et fiat h k q adder super multiplicē e vnitatē: qm g in d qūtum in c vel eius multiplicē z in f. dempto ergo vno de h k remaneat m k vt sit m et vnitas equale h sitqz e in m k fm l q ductus in b faciat n: cui addito vno fiat o quē numerabit d eadē rōne z sit vt scdm p q ductus in a faciat r: qui silr addit super multiplicē b qui sit q vnitatē. multiplico igitur r et q per c numerū datū et producātur s z t q erunt multiplices b z a int se driaz fm c numerū assignatū seruātes. Tertij elemētorū arithmetices Jordani finis



Si fuerint quotlibet numeri continue proportionales: duo et duo proximi erunt commensurabiles. 1

¶ Sint a b c d quotlibet nūeri continue proportiōales: dico a b esse cōmensurabiles. Itē z b c et c d. Si enī a nūeret b manifestū est a et b esse cōmensurabiles. et qz q proportio a ad b ea est b ad c z c ad d ideo b nūerabit c: et c nūerabit d. quare cōstabit propositū: a b: b c: c d: esse cōmensurabiles. at si a non nūerat b: qz ipossibile est tūc a et b eē in sua proportione mīmos. nā si a et b essent in sua pportione minimi essent p decimāoctauā tertij adinuicē primi: et per decimānonaz numerarēt quoslibet in sua proportione: z qz q proportio a ad b: ea est b ad c. a ergo nūeraret b pmus cōtra se primū qd est ipossibile et etiā oppositū positi. nō erunt ergo a et b in sua pportione mīmi. capiā ergo p vicesimātertiaz tertij e f mīmos in illa pportione q per decimānonā eiusdē numerabūt a b fm eundē numerū equalr vt fm g: et consilr b c et c d. sunt igitur a b: b c: z c d adinuicē cōmensurabiles: quod est propositū.

¶ Si nūerorū cōtinue pportionaliū duo extremi fuerint cōicantes erit nūerus cōiter oēs numerās maximusqz q oēs numerabit erit maximus extremos numerās. Ex hoc cōstat q si aliquot pportionales int duos cōicantes ceciderit: totidē inter vtrūqz eorū et maximū numerū eos cōiter numerantē cadere necesse est. Palāqz fit etiā maximos qui binos z binos numerorū proportionaliū cōiter numerāt esse cōtinue pportiōales 2

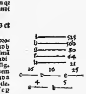


¶ Sint a b c d nūeri ɔtinue pportiōales quorū a d extremi sint cōicātes: dico pmo aliquē esse numerū eos oēs cōiter nūerantē. scdo maximū nūerū oēs numerātē esse maximū numerantē extremos. Cū enī p pcedentē a b cōicent z silr b c et c d: capio p 16 tertij maximū numerū numerātē a b q sit e: z maximū nūerantē b c q sit f. et maximū nūerātē c d q sit g. ponoqz h k mīmos in pportiōe a ad b et per 23 tertij et 19 eiusdē e f g numerabūt a b c fm h: et g nūerabit d fm k. sumo itē maximū numerantē e f q sit l z maximū numerantē f g q sit m: per vicesimātertiam tertij l nūerabit e z m f fm h. et iterū l nūerabit f fm k z m numerū g scdm k. per. 19. tertij et l z m sunt diuersi nūeri ab h k. nā si idē essent h in se produceret e z k in se produceret g z h in e producit a et k in g producit d z h k per. 18. tertij sunt contra se primi. erūt ergo a d per duodecimā tertij cōtra se primi qd est contra hypothesim. sunt ergo l z m alii ab h k. qz ergo h k numerāt l et m equaliter: numerēt ergo ipsos scdz n q per. 23. tertij est maximus eos

numerās qui ⁊ idē n per .23. primi numerabit a b c d: qđ est primū in propōne intentū. Et per decimā septimā tertii n erit inuētus maxim⁹ numerus numerās a b c d aliođn p correlariū 16 accidet maiorē numerū numerāre minorē. ⁊ qꝛ h denoiat n in l ⁊ l in e: ergo p 23 primi nūerus q̄ fit ex h in se qui sit o denoiat n in e. ⁊ qꝛ h etiā denoīat e in a: ergo p eandē 23 numerus qui fit ex h in o q̄ sit q denominat n in a. et eadē rōne qꝛ lz denoīat n in m et m in g. ergo per vicesimā tertiā primi numer⁹ qui fit ex lz in se qui sit p denoiat n in g: et etiā qꝛ lz denominat g in d: igit̃ per eandē numerus q̄ fit ex lz in p qui sit r denoīat n in d. numerat igitur n numerū a scđm q et numerū d scđm r. et qꝛ h lz sunt adinuicē primi: ergo per duodecimā tertii q et r sunt cōtra se primi: quare per vicesimā eiusdē in sua ꝓportione mīmi. Per correlariū igitur vicesimetertie eiusdē q et r numerabūt a ⁊ d scđm maximū numeꝝ numerantē a et d. est igitur n maximus nūerus numeros a d extremos numerās quod est secundū. Primū correlariū hinc cognoscit̃. nam qꝛ idē numerus h in n l e: producit l e a. ergo per septimā primi a e l n erunt cōtinue ꝓportionales. ⁊ per idē qꝛ l in n m g producit m g d: ergo d g m n erūt continue ꝓportionales quare sicut inter a ⁊ d cadūt b c duo medii ꝓportionales sic̃ inter a ⁊ n cadūt duo e l. et inter d ⁊ n cadunt g m duo medii ꝓportionales scꝫ totidē medii ꝓportionales int̃ duos cōicantes et totidem inter vtrūq̧ eoꝝ et maximū eos cōiter numerantē: qđ est primū correlariū. scđm vero hinc fit notū. nam qꝛ per vicesimātertiam tertii ⁊ decimānonam h in e in f et in g ꝓducit a b c. ergo per septimam secundi a b c ⁊ e f g sunt cōtinue ꝓportionales: qđ est secundū correlarium ⁊ propositū.

3 Numeros diuersarum proportionū sumere: quorum maximi cōmuniter binos et binos numerantes sint continue proportionales.

Sint a b nūeri contra se primi: a minor et b maior ⁊ a in se ꝓducat c et in b ꝓducat d ⁊ b in se producat e: per septimā secūdi q̄ proportio a ad b ea est c ad d. et p octauā eiusdē itertī que ꝓportio a ad b ea est d ad e. sunt ergo c d e cōtinue proportiōales. duco q̄ a in c et fiat f ⁊ in d ⁊ fiat g: eritq̧ p septimā secūdi g ad f sicut d ad c. quare ⁊ sicut b ad a et qꝛ q̄ proportio a ad b ea est c ad d: ergo per 25 secundi qđ fit ex a in d equū est et qđ fit ex b in c. at qđ fit ex a in d positū est esse g. quod ergo fit ex b in c est g. et qđ fit ex c in a est f. ergo p correlariū vicesimetertie tertii c est maxim⁹ numerus numerās f g. Item duco d in e ⁊ ꝓueniat h: qꝛ ergo d in a ꝓducit g: ⁊ d in e ꝓducit h. ergo p septimā scđi q̄ ꝓportio e ad a ea est h ad g: et proportio e ad a nō est vt b ad a. nā e ⁊ b totū scꝫ et pars equarent̃: quod est īpossibile. ergo ꝓportio h ad g nō est ꝓportio g ad f. Itē qꝛ a b sunt cōtra se p̄mi et e producit̃ ex b in se. igit̃ e p vndecimā tertij est p̄mus ad a. sunt igit̃ e ⁊ a in sua ꝓportione mīmi. at d nūerat g f̄m a ⁊ idē d nūerat h f̄m e. igit̃ p correlariū vicesimetertie tertij d ē maxim⁹ nūerus numerās g et h. sumo ergo lz primū ad d et maiorē d in alia quidē ꝓportione q̄ b ad a et q̄ e ad a: ⁊ duco ipm lz in e et ꝓueniat l. qꝛ ergo e in d facit h et e in lz facit l per septimā secūdi q̄ ꝓportio lz ad d ea est l ad h. at ꝓportio lz ad d posita est alia a ꝓportiōe b ad a et e ad a. ergo ē alia q̄ g ad f et h ad g. et qꝛ lz d sunt ꝯtra se p̄mi ⁊ iō in sua ꝓportione mīmi ⁊ numerāt h l f̄m e. est igit̃ p idē correlariū 23 tertij e maxim⁹ nūerus numerās h et l. sūpti sunt igit̃ f g h l numeri diuersaꝝ ꝓportionū quoꝝ maximi c d e binos ⁊ binos cōiter numerātes sunt ꝯtinue proportionales: quod est propositum.



4 Si numeroꝝ continue ꝓportionalium duo extremi sunt contra se primi: erunt oēs illi in sua proportione minimi

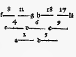
Sint a b c cōtinue proportionales quoꝝ a ⁊ c sint cōtra se primi: dico tres nūeros a b c esse mīmos in ꝓportione a ad b. nā si sint tres miores sint d e f: qꝛ p vicesimāptimā scđi ex equā proportionalitatē q̄ proportio a ad c ea est d ad f et a ⁊ c p hypothesim sunt contra se primi. ergo p vicesimā tertij sunt in sua ꝓportione minimi. numerāt ergo numeri a c per decimānonam eiusdē numeros d ⁊ f maiores scꝫ minores quod est īpossibile.

5 Si quotlibet nūeri fuerit in sua ꝓportiōe mīmi: ipsoꝝ duo extremi erūt ꝯtra se p̄mi

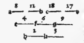
Hec est cōuersa p̄cedentis. Sint ergo a b c in sua ꝓportione minimi: dico a et c esse contra se p̄mos. Nā si a et c sint cōicantes erit nūerus aliq̇s idem p secundā hui⁹ eos oēs cōiter numerās q̄ sit d quos qꝛ a b c sunt tres nūeri inequales: nūerabit f̄m tres diuersos nūeros. numeret ergo a f̄m e ⁊ b f̄m f et c f̄m g: per septimā secundi e f g sunt in eadem proportione cum a b c et cū sint minores a b c vtpote q̄ sunt eorum partes nō sunt igitur a b c dati minimi: quod est contra hypothesim.

6 Numeros quotlibet f̄m datā proportionē minimos īuestigare. Vñ manifestū erit ex duoꝝ in aliqua ꝓportione minimoꝝ primo in ambos et scđo in se: tres. et ex eodē p̄mo in illos tres eodēq̧ scđo in tertiū: quattuor ꝓtinus eiusdē illius ꝓportionis minimos. q̧ si primū hoc pacto in omnes ducere pergis et secundū in vltimū: quotquot libuerit in aliqua proportione minimos efficies.

Illius ꝓportionis mīmi p vicesimātertiā tertij reperiātur q̄ sint a b: duco a in se ⁊ ꝓueniat c et a in b ⁊ ꝓueniat d et b in se et proueniat e per septimā ⁊ octauā scđi tres nūeri c d e erūt continue ꝓportionales et p duodecimā tertij extremi c e sunt cōtra se p̄mi quare per quartā hui⁹ illi tres nūeri sunt in sua ꝓportione mīmi. Itē duco a in oēs illos et prouenīāt f g h ⁊ b in e et ꝓueniat lz ⁊ eadē rōne f g h lz sunt cōtinue ꝓportionales et extremi f ⁊ lz contra se p̄mi et illi q̄ttuor in sua proportione mīmi. ex hoc processu quinq̧ sex septē et quotquot voles reperiētur. Correlariū ex mō demōstrationis cognitū est.



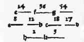
7 Si numeri cōtinue ꝓportionales in sua proportione fuerint mīmi: quotcūq̧ inter extremos fuerit medij totidē inter vtrūq̧ extremoꝝ ⁊ vnitatē ꝓportiōales eē ꝯuenit



¶ Sint a b c d nũeri cõtinue proportionales in sua ꝓportione mĩmi: dico quot fuerint medij cõtinue proportiõales int̃ a et d totidẽ esse medios ꝓportionales int̃ a ⁊ vnitatẽ et totidẽ int̃ d ⁊ vnitatẽ. nã qꝛ ꝑ primã hui⁹ qlibet duo nũeri proximi erũt cõmẽsurabiles sumo maxios binos ⁊ binos numerãtes q̃ sint e f g qui ꝑ scḋm correlariũ scḋe hui⁹ erũt cõtinue proportionales ⁊ sumo maxios illoꝝ maximoꝝ duos et duos numerãtes q̃ sint h k et l q̃ ꝓ vt a ad b ꝑ ꝑ vicesimãtertiã tertij numerãt e f et f g ꝓm mimos illius proportiõis. at cũ e numeret a: et g nũeret d ⁊ sint a et d ꝑ quintã hui⁹ contra se ꝑmi erũt ergo e ⁊ g ꝑ octauã tertij contra se ꝑmi. et eadẽ rõne h ⁊ l sunt cõtra se ꝑmi. ideoqꝫ in sua proportione mimi. ꝑ correlariũ igit̃ vicesimetie tertij e nũerat a scḋm h et h nũerat e scḋm h. et itẽ g nũerat d ꝓm k et k g scḋm k. quoties ergo ꝑ diffinitionẽ eius qḋ est numerũ ꝑ aliũ multiplicari vnitas in h et h in e ⁊ e in a. et silr̃ quoties vnitas in k toties k in g et g in d. sunt igit̃ vnitas h e a ꝯtinue proportiõales silr̃ et vnitas k g d cõtinue proportiõales. q̃re sicut int̃ extremos a d ꝯtinẽtur b c duo medij proportionales. silr̃ int̃ a et vnitatẽ ꝯtinẽtur duo e h et inter d et vnitatẽ itidẽ duo g et k medij proportionales: quod est propositũ.

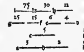
¶ Si inter vtrunqꝫ duorũ numeroꝝ et vnitatẽ numeri proportionales equales nũero ceciderint: inter ipsos quoqꝫ totidẽ cadere necesse est. 8

¶ Hec est cõuersa pcedẽtis vt si int̃ vnitatẽ ⁊ a cadãt h et e duo nũeri cõtinue proportiõales et int̃ vnitatẽ ⁊ d cadant k g: totidẽ medij proportiõales dico int̃ a et d totidẽ cadere. Nã qꝛ quoties vnitas in h toties h in e. ideo h in se duct⁹ producet e ⁊ ꝑ idẽ k in se producet g et h ⁊ k ducti in e et g producũt a et d duco ergo h in k et fiat f manifestũ erit ꝑ septimã et octauã scḋi e f g in ꝯtinua proportiõe eẽ vt h ad k deinde duco h in f et fiat b ⁊ k in f et fiat c cõstabitqꝫ ꝑ septimã scḋi vt a ad b ita b ad c et c ad d cadent itaqꝫ duo nũeri b et c medij proportiõales int̃ a et d quẽadmodũ cadebãt inter vnitatẽ ⁊ a et inter vnitatem et d: quod est propositũ.



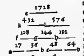
¶ Si fuerint quotlibet numeri continue proportionales: minimi quos duo et duo proximi numerant: in eadem proportione proportionales erunt. 9

¶ Sint a b c d numeri ꝯtinue ꝓportiõales at vero mimi quos duo et duo proximi numerãt sint e f g dico e f g eẽ ꝯtinue proportiõales. sumo enĩ h k in illa proportiõe mimos ⁊ ꝑ 24. tertii a b c numerãt e f g ꝓm k. ⁊ b c d nũerãt eosdẽ ꝓm h. ergo ꝑ septimã ꝑmi e f g sũt ꝯtinue proportiõales: qḋ ẽ propositũ



¶ Numeros diuersarum proportionum sumere: a quorum binis ⁊ binis numerati minimi: sint continue proportionales. 10

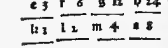
¶ Uolo sumẽ nũeros diuersaꝝ proportionũ a quoꝝ binis ⁊ binis mĩmi numerati sint proportiõales capio a b nũeros cõtra se ꝑmos a quidẽ maiorẽ ⁊ b minorẽ quoꝝ cõpositus sit c q̃ cum vtroqꝫ ꝑ nonã tertij ẽ prim⁹. et duco b in se et proueniat d et b in a ⁊ proueniat e et a in c et fiat f et c in se et fiat g: per septimã pimi q̃ proportio a ad b ea ẽ e ad d et f ad e tanq̃ c ad b et c ẽ maius a ergo ꝑ nonã scḋi maior est f ad e q̃ e ad d et g ad f vt c ad a que non est vt b ad a. nã c b essent eq̃les neqꝫ vt a ad b. nã per primã hui⁹ qꝛ esset cõtinua proportionalitas c ad a et a ad b proinde c et a cõicarent. est itaqꝫ proportio g ad f alia a proportiõe f ad e et e ad d. capio ergo minimũ quẽ numerãt d e q̃ sit h et mimũ quẽ numerãt e f. et sit k et minimũ quẽ numerãt f g et sit l. dico h k l esse cõtinue proportiõales. nam ꝑ 24. tertii b in e facit h. et qꝛ f ad e tanq̃ c ad b et c b sunt in sua proportiõe mĩmi ergo ꝑ eandem 24. b in f producit k est ergo k ad h vt f ad e quare vt c ad b. et qꝛ per idẽ c duct̃ in f ad producẽdũ l. nã f est mĩor et g maior ergo ꝑ octauã scḋi erit l ad k tanq̃ c ad b. nã b in f facit k et c in f facit l. sunt igit̃ l k h cõtinue proportionales mimi a binis et binis numeroꝝ diuersarũ proportionũ sumptoꝝ numerati: qḋ est propositũ



¶ Si inter duos numeros quotlibet cõtinua proportionalitate sumãtur: inter vtrũqꝫ eorum et minimũ quem omnes numerãt totidem assignari necesse est. 11

¶ Sint a b c d nũeri cõtinue proportiõales quoꝝ ꝑ 25 tertii e sit inuẽtus mĩmus quẽ numerãt: dico quot nũeri cõtinue proportiõales cadũt int̃ a et d: totidẽ cõtinue proportiõales cadere int̃ a et e et int̃ d et e. sint f g h mimi quos a b: b c: et c d bini et bini numerãt. erũt f g h ꝑ nonã huius cõtinue in eadẽ proportiõe a ad b ꝓportiõales. Itẽ mimi quos f g et g h bini et bini numerãt sint k l dico k eẽ mimũ quẽ numerãt a b c. nã si esset mĩor ꝑ correlarium 23 tertij f et g eundẽ numerarẽt quare ⁊ ꝑ idẽ correlariũ k minus ab eis numerat⁹: maior scꝫ minorẽ qḋ est ĩpossibile. et eodẽ argumẽto l est mĩmus quẽ numerãt b c d et ex eodẽ ostẽdetur mimũ quẽ numerãt k l eẽ minimũ quẽ numerãt a b c d. at mim⁹ quẽ numerãt a b c d posit⁹ est e. igit̃ e est mimus quẽ numerãt k l. Sint p̃terea m et n mimi proportionis a ad b: ergo ꝑ 24. tertii a numerat f et f k et k e ꝓm n ⁊ per idẽ d numerat h et h l et l e scḋm m. quare ꝑ octauã scḋi a f k e sunt ꝯtinue proportiõales. itẽ ⁊ d h l e: atqꝫ sicut int̃ a et d sunt b c duo medij proportionales: ita inter a et e sunt duo f k et inter d et e duo h l itidẽ medij proportionales: qḋ est propositũ

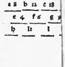
¶ Si primus ad secundũ sicut tertius ad quartũ quotcunqꝫ inter primũ et secundum totidem inter tertium ⁊ quartum ꝓportionaliter medios cõsistere necesse est. 12



¶ Sit a ad d sicut e ad h: et int̃ a ⁊ d sint b c duo medij ꝓportiõales. dico etiã int̃ e et h eẽ duos medios ꝓportiõales. Sumo q̃tuor mimos illius ꝓportiõalitatis q̃ sint k l m n: ꝑ 21 scḋi et equã proportionalitatẽ k ad n sicut a ad d quare ⁊ sicut e ad h. et qꝛ per quintãdecimã p̃tis k n sunt cõtra se ꝑmi erunt ꝑ 20 tertij in sua proportione mimi et ꝑ decimãnonã eiusdẽ minimi k n numerabũt equalit̃ e ⁊ h. numerẽt igit̃ numeri l m numeros f et g ꝓm eundẽ numerũ. et per septimã secundi e f g h erunt cõtinue proportionales. sunt igit̃ f g itidẽ duo medij proportionales int̃ e ⁊ h vt duo b c int̃ a ⁊ d: qḋ est propositũ.

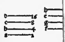
13 ¶ Numerorũ continue proportionaliũ si primus nõ numeret secundũ nõ numerabit aliquis eorum vltimũ. ꝙ si primus numeret vltimũ numerabit et secundũ.

¶ Sint a b c d numeri cõtinue ꝓportionales et a nõ numeret b: dico nullũ eorũ nũerare d. ⁊ certũ est ꝙ sicut a ad b: ita c ad d. et a nõ numerat b: c etiã non numerare d. at ꝙ b nõ numeret d pꝫ. capio enim e f g tres minimos ꝓportionis a ad b. per equã eni proportionẽ que ꝓportio e ad g: ea est b ad d. at e ⁊ g per quintã sunt cõtra se primi: ergo e nõ numerat g: quare neqꝫ b numerabit d. si eni e numerat g ipm e esse vnitas. et cũ que proportio e ad f: ea sit a ad b ⁊ e vnitas numeret f a etiã nũeraret b: qꝺ est ꝯtra hypothesim. et cõsimiliter ꝓbabis a nõ numerare d acceptis quatuor minimis in illa ꝓportione ꝗ sint h k l m. nã cum ꝓmus nõ sit vnitas (alioquĩ oẽs numeraret ⁊ ita a oẽs) prim⁹ ⁊ vltimus ꝑ quintã hui⁹ erũt contra se primi ⁊ prim⁹ h nõ numerabit m: quare neqꝫ a numerabit d. vt eni h ad m: ita ꝑ equam ꝓportionalitatẽ a ad d qꝺ est primũ. Scdm pꝫ ex opposito ꝯñtis hui⁹ vltimi mõstrati. Si eni a nõ numerat b: etiam nõ numerat d. vt monstratũ est ꝑ primã partem: ergo ex opposito ꝯñtis si a numerat d numerat ⁊ b: quod est secundum.



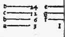
14 ¶ Si primus in tertio quoties vnitas in secundo: inter primũ et tertium et inter vnitatem ⁊ secundũ numeri proportionales numero equales inueniuntur.

¶ Sint tres numeri a e d: a prim⁹: e secũdus: d tertius. et sit vt quoties a est in d: toties vnitas sit in e dico ergo quot numeri inter a ⁊ d cõtinue ꝓportionales inueniũtur: totidẽ inter vnitatẽ ⁊ e reperiri. Reperiãtur eni inter a ⁊ d duo nũeri b c cõtinue ꝓportionales: qm̃ eni a numerat d ergo ꝑ premissam a nũerabit b. vnitas ergo numeret f quoties a ẽ in b: itẽqꝫ f numeret g quoties b nũerat c: nũeret etiã g toties quẽcunqꝫ numerũ. vt verbi cã h quoties c nũerat d: qꝛ ergo vt a ad b: ita vnitas ad f et vt b ad c. ita f ad g. et vt c ad d: ita g ad h. ergo ꝑ equã proportionalitatẽ vt a ad d: ita vnitas ad h. sed ⁊ vt a ad d ita ⁊ vnitas ad e. sunt ergo h ⁊ e idem numerus: quare inter vnitatẽ ⁊ e duo pariter numeri f et g reperiuntur medij proportionales vt inter a et d duo b ⁊ c: quod est propositum.



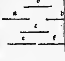
15 ¶ Si fuerint duo numeri contra se primi quotcũqꝫ inter alterũ eorũ et minimũ quem numerãt: totidem inter reliquũ ⁊ vnitatẽ proportionales reperiri cõtingit.

¶ Sint cõtra se primi a ⁊ e et minimus quẽ numerãt sit d: dico ꝙ si inter a et d cadũt b c duo medij ꝯtinue ꝓportionales totidẽ cadẽ inter vnitatẽ ⁊ e: qꝛ a e sunt contra se primi. et ideo in sua ꝓportione minimi et d est minimus quẽ numerãt: ergo ꝑ vicesimãquartã tertij a nũerat d secũdum e. est ergo toties a in d quoties vnitas in e: ergo per precedentẽ quot numeri inueniunt inter a ⁊ d primũ ⁊ tertium: totidem continue proportionales inueniunt inter vnitatem ⁊ e secundũ: quod est propositum.



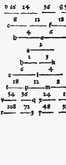
16 ¶ Si fuerĩt duo numeri cõicantes: quotcũqꝫ inter alterũ eorũ ⁊ maximũ ꝗ eos nũerat totidẽ inter reliquũ ⁊ minimũ ab eis numeratũ ꝯtinue ꝓportionales ꝯsistere necẽ est.

¶ Sint a b nũeri adinuicẽ ꝯmẽsurabiles et c maxim⁹ eos numerãs ⁊ d minimus ab eis numerat⁹: dico quot ꝓportionales cadũt inter c et b: totidẽ cadere inter a ⁊ d. itẽ quot cadũt inter c ⁊ a: totidẽ cadere inter b ⁊ d. Sint eni e ⁊ f minimi in ꝓportione a ad b: ergo ꝑ vicesimãtertiã tertij e in c facit a. et per vicesimãquartã eiusdẽ e in b facit d: ergo ꝑ septimã scdi ꝗ proportio c ad b ea est a ad d. ergo ꝑ duodecimã hui⁹ quotcũqꝫ cadũt medij ꝓportiõales inter c ⁊ b primũ et scdm: totidẽ cadũt inter a ⁊ d tertiũ et quartũ et iterũ qꝛ vt c ad b: ita a ad d. ergo ꝑmutatĩ c ad a vt b ad d: quare ꝑ eandẽ duodecimã quot medij proportionales cadẽt inter c et a: totidẽ cadent inter b ⁊ d. manifestũ est ergo quotcũqꝫ inter alterũ eorũ et maximũ eos numerantẽ cadant: totidẽ inter reliquũ ⁊ minimũ ab eis numeratũ cadere: qꝺ est ꝓpositũ.

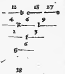


17 ¶ Si ab vno principio duo ordines numerorũ ꝓportionaliũ numero equaliũ sumant quotcunqꝫ inter primum et alterũ extremorũ: totidem inter extremos medij secũdum ꝓportionem proximorum a primo ꝓportionales erunt.

¶ Incipiat ab a ad d vnus ordo numerorũ continue proportionaliũ et ab eodẽ a ad g secundus ⁊ numero quidẽ equaliũ: dico quot medij proportionales continebũtur inter a ⁊ d: totidem cõtineri inter d ⁊ g sm ꝓportionẽ proximorũ a primo. cõtineant ergo b c medij ꝓportionales inter a ⁊ d: ⁊ e f medij proportionales inter a ⁊ g: totidẽ cõtineri dictũ est inter d g sm proportionẽ b e: qꝺ ostendit. Capio eni h k l minimos proportionis b ad e ⁊ duco h in oẽs illos et fiant l m n o ex vna parte: et ex altera ꝑ eã fiant l p q r per septimã secundi l m n o sunt cõtinue proportionales: similiter et l p q r. et per eandẽ que proportio b ad e: ea est m ad p. Deinde duco k in a e ⁊ f et proueniant s t v: eruntqꝫ per septimã secundi s ad t ⁊ t ad v sicut l ad p: p ad q et q ad r. ⁊ per octauam eiusdem sicut h ad k: ita ⁊ l ad s. quare m ad p sicut l ad s. et qꝛ p fit ex h in e ⁊ t ex k in e: ideo per octauam secundi p ad t vt h ad k: quare vt m ad p. sunt igitur continue proportionales m p t. et qꝛ dictũ ẽ vt s ad t ⁊ t ad v: ita l ad p: p ad q et q ad r. est ergo econuerso r ad q vt v ad t: ergo permutatim r ad v vt q ad t. ⁊ quia iterum q ad p vt t ad s: ergo permutatim q ad t vt p ad s: quare p ad s: q ad t et r ad v erunt in eadem proportione. ⁊ quia que proportio m ad l: ea est n ad m ⁊ o ad n: ⁊ m ad l probata est vt p ad s. ergo vt n ad m: ita q ad t. ergo permutatim que proportio n ad q: ea est m ad t. ergo per duodecimam huius cum inter m ⁊ t contineatur vnum medium proportionale scꝫ p secundũ proportionem m ad p: itidem continebit vnum medium proportionale inter n q secundũ proportionẽ m ad p qꝺ sit x. ⁊ qꝛ q fit ex h in f ⁊ v ex k in f per octauã primi erit proportio q ad v vt h ad k: quare vt m ad p. sunt igitur n x q v continue proportionales sm

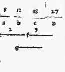


ꝓportionē m ad p. at rursum cū que ꝓportio o ad n ea sit r ad v. ergo ꝑmutati o ad r vt n ad v. sed inter n et v cōtinentur x q duo medij ꝓportionales sm proportionē m ad p. ergo per duodecimā huius sm eandē proportionē totidem cōtinebuntur medij inter o et r q sint y z. at cū o fiat ex h in d et r ex h in g. ergo per septimā secundi que ꝓportio o ad r ea est d ad g. ergo per duodecimā huius quot medij proportionales cōtinentur inter o et r sm proportionē m ad p totidem continebūtur inter d et g. at duo medij y z vt monstratū est sm proportionē m ad p siue b ad e qđ idem est continētur inter o et r. igitur et duo sm eandē proportionē continentur inter d et g: qđ erat demōstrandū.



¶ Si fuerint quotlibet numeri in sua proportione minimi: quicunq̧ aliquem illorum numerat alteri terminorū illius proportionis erit cōmensurabilis. 18

¶ Termini diffiniti sunt q in aliqua ꝓportione sunt mimi. Sint ergo a b c d quotlibet numeri ꝯtinue ꝓportionales in sua ꝓportione minimi et sint e f termini in ꝓportione a ad b et numeret g numerū a aut b aut c aut d: vt verbi cā: dico g esse cōmensurabilē e aut f. capio tres mīmos in ꝓportione a ad b per sextā huius q sint h k l. q2 igitur ex correlario eiusdē sexte ex e in l fit c. ergo ꝑ quintā tertij g cōmunicabit cum e aut cum l. si cum e constat propositum. si autem cum l: q2 per idem correlarium ex f in se fit l per eandem quintam tertij cōmunicabit cum f. quod est propositum.

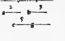


¶ Si fuerint quotlibet numeri in sua proportione minimi: quilibet eorum ad compositum ex reliquis erit primus. 19

¶ Sint a b c d quotlibet numeri continue ꝓportionales in sua ꝓportione minimi. e f vero termī proportionis a ad b. dico ꝯpositū ex a b c esse primū ad d. Nam si aliquis numeraret ꝯpositū ex a b c et d. ergo ꝑ precedentē cōicabit cum e aut f erit ergo aliqis numerus cōiter numerās e aut f. et compositū ex a b c et d q sit g: q2 ergo g numerat e aut f et ꝯpositum ex a b c et numerū d et vterq̧ e et f numerat b et c per decimānonā tertij. ergo per vicesimātertiā primi g numerabit b et c. ergo et g per quintā scđi numerabit a residuū: sed g positus est etiā numerare d: et a et d per quintā huius sunt contra se primi igitur g numerat contra se primos qđ est impossibile. nō ergo cōpositus ex a b c est cōpositus ad d sed necessario primus: quod est propositū. et ita de quolibet alio ad cōpositum ex reliquis argumētare

¶ Si quotlibet numeri fuerint in sua proportione minimi: qui ex omnibus componitur ad quemlibet eorum erit primus. 20

¶ Hoc ideo est q numerus cōpositus ex duobus contra se primis ad quēlibet eorū per nonam tertij est primus. at ꝑ precedētem quilibet numerorū in sua ꝓportione minimorū ad compositū ex reliquis est primus: ergo cōpositus ex illis per eandē nonam ad quēlibet illorum numerorū et compositū ex reliquis est primus. quare ad quēlibet illorum erit primus: quod est propositum.

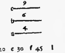


¶ Si fuerint duo numeri contra se primi: tertium eis in continua proportionalitate adiungi est impossibile. 21

¶ Nam si tertius eis in cōtinua ꝓportionalitate adiūgeretur: ergo per primā huius primus et scđs erunt cōmensurabiles: quare nō erunt contra se primi quod est contra hypothesim et propositū.

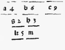
¶ Si duo numeri contra se primi numerent alios duos sm numerū a neutro eorum numeratum: illis quoq̧ in continua proportionalitate non adiungetur tertius. 22

¶ Sint a b numeri contra se primi et e numerus neq̧ ab a neq̧ ab b numeratus sm quē a numeret c et b numeret d: dico non esse numerū in continua ꝓportionalitate numeris c et d adiungendū. Si enī sit aliquis esto ille f: q2 per octauā secūdi ꝓportio c ad d vt a ad b erit: ergo d ad f vt a ad b. et a b sunt contra se primi quare per vicesimā tertij sunt in sua ꝓportione minimi et per decimānonam eiusdem quoties a numerat d toties b numerat f. sit ergo vt equalit numerēt sm g: cum itaq̧ b numeret d sm e et f sm g. ergo per septimā secundi q proportio d ad f ea est e ad g. quare et q̄ a ad b: ea est e ad g. et a b ꝓbati sunt in illa ꝓportione mīmi. igitur ꝑ decimānonam secūdi a b numerāt e g equalit. numerabit igit alter numerorū a aut b numerū e: quod est contra hypothesim.



¶ Si numeri proportionales fuerint in sua proportione minimi: non erit extremi ad aliquem proportio que primi ad secundum. 23

¶ Sint a b c continue ꝓportionales in sua ꝓportione mīmi: dico c ad nullū esse ꝓportionē q̄ a ad b. Si enī sit aliqs esto ille d. q2 ergo a ad b sicut c ad d: ergo ꝑmutatī a ad c sicut b ad d. et q2 a b c sunt in sua ꝓportione mīmi: ergo ꝑ quintā hui⁹ a c sunt cōtra se ꝑmi. quare ꝑ vicesimā tertij in sua ꝓportiōe mīmi quare ꝑ decimānonā eiusdē a nūerabit b: et c nūerabit d equalr. at si a nūerat b: etiā b nūerat c. nam eadem ꝓportio quare per vicesimātertiam primi et a numerabit c: veruntamen a c erant contra se primi. hoc igitur impossibile et propositum.



¶ Si quotlibet numeri in sua proportione minimi totidē alios numerēt sm numerū a neutro illius proportionis numeratū: nō erit alius cum illis cōtinue ꝓportionalis. 24

¶ Sint a b c nūeri ꝯtinue ꝓportionales in sua ꝓportione minimi q numerēt totidē d e f sm k q neq̧ numeret ab g neq̧ ab h in ꝓportione a ad b minimis: dico q d e f nō est adiūgendus aliqs cū illis ꝯtinue ꝓportionalis. Si enī fuerit aliqs sit l q adiūgat post f: nūerabunt ergo a b c tres mimi tres vltimos illius ꝓportiōis e f l equalr: sitq̧ id sm m. et q2 c numerat f sm k et l sm m: ꝑ septimā ergo scđi k ad m sicut f ad l: quare et sicut g ad h per decimānonam. ergo tertij g h in illa ꝓportione minimi nūerabunt k m equaliter: qđ est contra hypothesim. positū enī erat neq̧ g neq̧ h numerare k.

25 ¶ Si sumantur numeri ab vnitate cōtinue proportionales: nullus eorum numerabit vltimum nisi sm aliquem in illa serie dispositorum.

¶ Sint a b c d e f numeri cōtinue pportiōales ab vnitate: dico nullū eoꝝ numerare f nisi sm aliquē in illo ordine positoꝝ. nam qꝛ quoties vnitas in a toties e in f: ergo per diffinitionem e numerat f scdꝫ a. Item qꝛ vt vnitas ad a: ita d ad c. et vt a ad b: ita e ad f. ergo per equā pportionalitatem vt vnitas ad b ita d ad f. quoties ergo vnitas in b: toties d in f. per diffinitionē igit̃ d nūerat f scdm b. et qꝛ iteꝝ per equā pportionalitatem per vicesimamprimā secundi vt vnitas ad c: ita c ad f. quoties ergo vnitas in c toties c in f: quare c numerat f scdm se. et qꝛ mōstratus est d numerare f scdm b: ergo alternatim per octauam primi b numerat f scdm d. et qꝛ etiā e mōstratus est nūerare f scdm a: alternatim a nūerabit f scdm e. est itaqꝫ ostensum a b c d e numerare f vltim sm aliquē in illo ordīe positoꝝ. qđ erat ppositū.

26 ¶ Si numerorum ab vnitate continue proportionaliū secundus ab vnitate fuerit numerus primus: nullus numerabit vltimū nisi aliquis in ordine antecedentiū.

¶ Sint a b c d numeri ꝯtinue ab vnitate pportiōales: et a numerus pmus. dico qꝫ nullus numerabit d: nisi aliqs precedentiū d in ordine numeroꝝ a b c d. Si enī aliqs alius numeret d sit e qui nūeret eū scdm f. qꝛ ergo a nūerus pmus nūerat d pductūꝫ ex e in f: ergo p quartā tertij a nūerat e aut f. sit ergo vt numeret e intelligo qttuor nūeros: a/e/f/c: et qꝛ per precedētem a in extremus in extremū pducit d et eūdē pducit e in f medius in mediū. ergo per vicesimāquintam scdi vt a ad e: ita f ad c. sꝫ a nūerat e: ergo et f numerat c. numeret ergo f nūerū c scdm g: eadē rōne f vel g nūerabit b: sitqꝫ id scdꝫ h. p idē quoqꝫ tandē ꝯcludes g aut h nūerare a: qre a non ē nūerus pmus. qđ ē ꝯtra hypothesim. at si g aut h ponat̃ eq̃lis a: argumētaberis p pmissam reliquos eē equales iis qui sunt in ordīe a b c d: et ppositū.

27 ¶ Numeris ab vnitate proportionalibus si aliquis primus vltimum numeret: secundum quoqꝫ ab vnitate numerabit.

¶ Sint a b c d ꝯtinue pportiōales ab vnitate: sitqꝫ e numerus primus qui nūeret d vltim: dico ipm e numerare a scdm ab vnitate. Si enī e primus non nūerat a: ergo p primā tertij e erit primus ad a. et cū quoties vnitas in a toties a sit in b: ergo a scdm se numerat b. quare per vndecimā tertij b est pmꝰ ad e. et cū quoties vnitas in a toties b sit in c: ergo b nūerat c secūdū a. quare per decimā tertij e est pmus ad c. et iteꝝ quoties vnitas in a toties c in d: ergo c numerat d secūdum a. per eādem ergo decimam e est primus ad d. non ergo e numerat d. quod est oppositum positi.

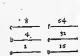
28 ¶ Si numerorum continue proportionalium primus de secundo et vltimo tollatur: que proportio fuerit residui secundi ad primū ea est residui vltimi ad cōpositum oīm precedentium.

¶ Sint a.b.c.d.e.f. et g k: numeri ꝯtinue pportiōales et detrahat̃ a b primus de c d secūdo: sitqꝫ residuus secūdi l d. Itē detrahat̃ a b de vltimo g k/ sitqꝫ residuus h k. dico que pportio l d ad a b: eā esse h k ad ꝯpositū ex a.b.c.d. et e f. sumo enī ex g k nūeꝝ g m equalē e f/ et g n equalē c d. et intelligo g k. g m. et g n. vt tria tota. qꝛ ergo g m equat̃ e f: que proportio g k ad e f: ea est totius g k ad totū g m. et qꝛ g n equat̃ c d: idco que pportio e f ad c d: ea est totius g m ad totū g n. et per idem q̃ pportio c d ad a b: ea est g n ad g h. et vltra q̃ pportio totius g k ad totū g m: ea est g m detracti g k ad g n detractum g m/ qꝛ numeri g.k.e.f et c.d positi: sint ꝯtinue pportiōales. et q̃ pportio totiꝰ g m ad totū g n: ea est g n detracti g m ad g h detractū g n. quare p quintā scdi m k ad n m/ et n m ad h n residuoꝝ ad residua vt totoꝝ ad tota: id est m k ad n m: sicut e f ad c d. et n m ad h n sicut c d ad a b. ergo pmutatim per tertiā secūdi sicut m k ad e f: ita n m ad c d et h n ad a b: ergo p vicesimam secūdi h n m k sīl qui sūt h k: ad h positū ex e f c d et a b: sicut h n vnius illoꝝ ad a b vnum hoꝝ. at cū g n equetur c d et g h equetur a b: ergo g h equabitur c l. equat̃ ergo h n nūero l d. ablatis enī equalibus ab equalibus: residua sūt equalia. qre ergo que proportio l d ad a b: ea erit h k ad ꝯpositū ex oībus precedētibus. qđ est propositum.

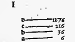
29 ¶ Propositis duobus numeris/ sumptisqꝫ quotlibet scdm proportionem eoꝝ pportionalibus: si minor in minorem et maior in maiorem ducatur et pductorum differentia per differētiam ppositoꝝ diuidatur: exibit numerus qui ex omnibus aliis coaceruat̃.

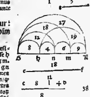
¶ Sint a b et a h duo numeri et h b eoꝝ differētia: et sint c d/ d e/ e f/ et f g: quotlibet in ꝯtinua pportione a b ad a h: ducaturqꝫ a b in c d et pueniat l m. item a h in f g et pueniat l n: sitqꝫ differentia l m et l n numerus n m. dico qꝫ si n m diuidatur p h b: differētiam primi ad scdm puenire c g numeꝝ ex c d e f g cōpositum. Nam ex a b in d e fiat l o et in e f fiat l p et in f g fiat l q. qꝛ per decimā primi qđ fit ex ductu a b in f g: equū est ei quod fit ex ductu a h et h b in eūdē nūerū f g: et ex a b in f g fit l q: et ex a h in eūdē fit l n. ergo ex h b in f g per eādem decimā fit n q. Preterea intelligo quattuor numeros: a b primum/ a h secūdū e f tertiū/ et f g quartū. et qꝛ q̃ proportio primi ad scdm ea est tertij ad quartū: ergo p vicesimā quintam secūdi quod fit ex ductu a b in f g primi in vltimū: equū est ei qui fit ex a h in e f medio in medium. at quod fit ex a b in f g est l q: ergo quod fit ex a h in e f est l q. at vero qđ fit ex toto a b in e f est l p: ergo per decimam primi quod fit ex h b in e f est q p. Et eadē ꝯsimiliqꝫ argumētatione: quod fit ex h b in d e est p o: et in c d est o m. quare per nonam primi h b in toto c g producit n m. ergo per sextam petitionem primi si productus n m diuidatur per eūdem numerū h b: redibit prior numerus c g. qđ erat demonstrandum.

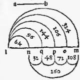
¶ Quarti elementorum Arithmetices Jordani finis.



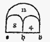












Omnis ꝓportio sup aliã quãlibet addere ꝓportionem dicitur: que cũ illa ꝯti-
d nuata ipam componit. differẽtia ꝓportiõis ad aliam: vocatur illa ꝓportio qua eadem supra reliquam abundare dicitur.

e 6	f 4	g 3	
a 2	b 1	c 4	d 3

¶ Quod addit ꝓportio primi ad scðm sup ꝓportionẽ tertii ad quartũ: est 1
ꝓportio que est inter ꝓductum ex primo in quartum ꝛ ꝓductũ ex secũdo in tertium.

¶ Hec docet substrahere ꝓportionẽ a ꝓportione: et q̃/quãtaq; proportio minore proportiõe a maiore substracta relicta sit: quã hic dẽtiam proportiõis a ꝓportiõe noĩamus. Sint quattuor numeri: a pmꝰ / b secũdus. c tertius. d quartus: et sit maior proportio a ad b q̃ c ad d / et ex a in d fiat e: et ex b in c fiat f. Dico ꝓportiõem quã addit a ad b sup proportiõem c ad d: eã esse q̃ est inter e et f. duco enĩ itẽ b in d ꝛ fiat g. qꝛ enĩ b in c facit f / ꝛ in d facit g: ergo ꝑ septimã secũdi q̃ proportio c ad d: ea est f ad g. et quia a in d facit e: et b in d facit g: ergo per octauã scði e ad g vt a ad b. et qꝛ posita est a ad b maior ꝓportio q̃ c ad d: ẽ ergo ꝛ e ad g maior ꝓportio q̃ f ad g. quare ꝑ nonã secũdi e maior est q̃ f. est itaq; ex diffini tione ꝓportiõis ꝯposite ex scðo huius habita ꝓportio e ad g ꝯposita ex ꝓportionibus e ad f et f ad g. addit ergo ꝓportio e ad g ꝓportiõem e ad f: sup ꝓportionẽ f ad g. quare ꝛ ꝓportio a ad b eãdẽ ꝓportionem e ad f addit sup proportionem c ad d. quod est propositũ. ¶ Jd tñ aiaduerti dignũ est si semel minore proportione de maiore substracta relicta sit differentia ꝓportio maior: itẽ ab ea demãt mior et id toties fiat quousq; relicta sit aut substracte equalis aut ea minor, sicq; cognoscere ꝓptũ erit q̃ties proportio minor fuerit in maiore et quã insup superaddet minorem: si vltra supaddat.

e 6	f 4	g 12	
a 2	c 4	b 1	d 3
e 6	f 4	g 8	
d 3	c 4	b 1	a 3

¶ Quo abundat proportio primi ad scðm super proportionem tertii ad quartum: eo 2
abundat proportio primi ad tertium sup ꝓportionẽ scði ad quartum. Itẽq; ꝓportio quarti ad tertium super proportionem secundi ad primum.

¶ Sit eadem hypotesis q̃ prius: dico pmo qua ꝓportiõe vt e ad f abũdat proportio a ad b sup ꝓportionem c ad d: eadẽ ꝓportiõe abũdare a ad c sup ꝓportionẽ b ad d. Scðo eadẽ q̃q; ꝓportione abũdare d ad c sup ꝓportionẽ b ad a. Primũ patet: nã qꝛ a ad b primi ad scðm maior ẽ ꝓportio q̃ c ad d tertiũ ad quartum. ergo ꝑ duodecimam secũdi maior est proportio a ad c primi ad tertiũ: q̃ b ad d secũdi ad quartum. fac ergo a primum / c scðm b tertiũ / d quartum: et argumentare per precedentem ꝛ videbis propositum. Scðm similiter patet: nam quia a ad b maior q̃ c ad d: ergo per vndecimã secũdi erit d ad c maior q̃ b ad a. fac ergo d primum / c secũdum / b tertium / a quartũ: ꝛ argumentare per precedẽtem: et facile videbis propositum.

e——8 f——4 g——3
a——2 b——1
c——4 d——3

¶ Si addat aliqua ꝓportio super alteram q̃tum tertia sup quartam: erit vt cõposita 3
ex prima ꝛ quarta composite ex reliquis sit equalis.

a 2	c 4	e 4	g 8
b 1	d 3	f 2	h 6

l——16
k——8
m——6
n——64
q——48
o——32
p——24

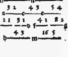
¶ Priusq̃ ad ꝓpositũ demõstrandũ veniamus: volo demõstrare quo pacto proportio ꝓportiõi addẽda sit: et dico ꝓportiõem ꝓductoꝝ ex pmo terio vniꝰ proportiõis in primũ alteriꝰ: ꝛ ex secũdo in scðm eẽ ex duabus illis ꝓportiõibus ꝯpositã. Sint enĩ a ad b et c ad d due ꝓportiões: quas volo sibi addere atq; ex ipsis ꝯpositã ꝯflare. duco c in a ꝛ ꝓueniat e: et d in b ꝛ ꝓueniat g. dico proportionem e ad g: eẽ ꝯpositã ex ꝓportiõibus a ad b ꝛ c ad d. duco enĩ itẽ c in b ꝛ ꝓueniat f: et per septimam scði q̃ ꝓportio a ad b: ea est e ad f. et per octauam eiusdem q̃ ꝓportio c ad d: ea ẽ f ad g. et ꝓportio e ad g ꝯponitur ex proportiõibus e ad f ꝛ f ad g. quare ꝛ ex proportiõibus a ad b: ꝛ c ad d: quod intẽdebatur. Nunc ergo ad demõstrãdum ꝓpositũ veniamus. Sit ergo vt q̃tũ proportio a ad b addit sup ꝓportionẽ c ad d tm̃ addat proportio e ad f sup ꝓportionẽ g ad h. dico ergo proportiõem ꝯpositã ex proportiõibu a ad b ꝛ g ad h: eẽ equalẽ proportioni ꝯposite ex proportiõibus c ad d ꝛ e ad f. duco enĩ g in a ꝛ in b et fiant l k et b in h et fiat m: per septimã ergo pmi l ad k sicut a ad b. et qꝛ b in g facit k et in h facit m: per eãdem k ad m sicut g ad h. quare erit proportio l ad m ꝯposita ex ꝓportiõibus a ad b et g ad h pria scꝫ ꝛ vltia. Deĩn duco c in l / in k / ꝛ in m: et ꝓueniãt n / o / p: qui ꝑ septimã secũdi erũt proportiõales tribus ꝓportiões l. k. m. qꝛ ergo n ad o sicut l ad k: et o ad p sicut k ad m: ergo per equã proportiõalitatem n ad p sicut l ad m. quare equales sunt proportiões l ad m ꝛ n ad p. deĩn duco d in l ꝛ ꝓueniat q. qꝛ ergo n fit ex c in l ꝛ q ex d in l: ꝑ octauam ergo secũdi est n ad q sicut c ad d. Itẽ qꝛ l ad k sicut a ad b: addet l ad k sup proportiõem c ad d q̃tũ a ad b addit sup eãdem proportionem c ad d. Intelligo ergo q̃ttuor numeros l / k / c / d. et quia l in d facit q: ꝛ k in d facit o vt mõstratũ est: ergo ꝑ primã huius q ad o est qð addit a ad b sup proportionem c ad d. et qꝛ eãdem proportiõem addit e ad f sup g ad h: addit q̃ e ad f ꝓportiõem q ad o sup ꝓportionem g ad h. at proportio o ad p est vt g ad h. et q ad o est qð addit e ad f sup g ad h: ergo q ad p ꝯsistis ex q ad o: et o ad p equal ꝓportioni e ad f. et n ad q vt dictũ est equal c ad d: ꝛ n ad p equal l ad m ꝯposite ex pma ꝛ vltia. et n ad p ꝯstituit ex scða ꝛ tertia. sic itaq; ꝯstructũ est propositum

p 24	q 6	r 20	s 8

a——4 c——6 e——5
b——2 d——3 f——4
g——24
h——12
k——6
l——120
m——60
o——48
n——30

¶ Si inequales ꝓportiones vni addãtur: erit additaꝝ ꝛ ꝯpositarũ eadem dñia. 4
¶ Sit a ad b quecũq; proportio: sintq; c ad d ꝛ e ad f due ꝓportiões inequales vt c ad d maior / ꝛ e ad f minor: addatq; proportio c ad d proportioni a ad b: sitq; ꝯposita ꝓportio p ad q. addat itẽ ꝓportio e ad f eidem proportioni a ad b ꝛ proueniat ꝯposita r ad s: dico eãdem eẽ differẽtiã proportionis p ad q ad proportionem r ad s q̃ est proportiõis c ad d ad proportiõem e ad f. duco enĩ c in a ꝛ in b ꝛ proueniat g h: et b in d ꝛ proueniat k. per septimam secũdi erit proportio g ad h vt a ad b: et h ad k vt c ad d quare proportio g ad k est ꝯposita ex proportiõibꝰ a ad b ꝛ c ad d: atq; eadẽ proportioni p ad q. duco item e in g / in h / et in k: et proueniãt l. m / n proportiõales: per septimam secundi g h k. et duco f in h et

prouenit o. erit enī l ad m sicut g ad h: quare sicut a ad b. et qr e in h producit m: et f in h producit o: g per octauam secūdi q̄ proportio e ad f: ea dē est m ad o. quare proportio l ad o cōposita ē ex proportiōe a ad b et e ad f. atq3 eadem proportiōi r ad s. at qr l ad n et g ad k et p ad q equātur: et sīlr l ad o et r ad s adinuicem equātur: et l ad n superat l ad o proportiōe o ad n. erit o ad n dfia p ad q: et r ad s propor tionum ɔpositar. at cū m ad n equetur c ad d: et m ad o equetur proportioni e ad f vt hec oīa mōstrata sunt: et proportio m ad n supet proportionem m ad o in proportione o ad n. erit ergo eadem proportio o ad n differētia c ad d et e ad f proportionum scʒ additar et ɔpositar. quod est propositum.



5 ¶ Proportiones minores minoribus siue eq̄lib⁹ addite: minorē ꝓportionē ɔstituūt.

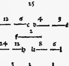
¶ Sit a proportio minor b: et c minor d: et e maior f. dico proportionem ɔpositā ex a c minorem eē pro portione ɔposita ex b et c et proportiōem ex c e minorem eē proportiōe ex d e. sit itē proportio g equalis proportioni f. dico proportionem ex e g: minorem eē proportiōe ex f g. Primū pz: nam cū proportiōes a b sint inequales et b sit maior a. sit ergo h differētia qua abūdat b sup a: et proportio ex b addita c sit k et ex a addita c sit l: per p̄cedentē eadē erit dfia k ad l et b ad a. sed b est maior a in proportiōe h: igit k maior l in eadē proportiōe. et eadē rōe mōstrabis proportiōem ɔpositā ex d e maiorem eē propor tione ɔposita ex c e. qd̄ est pimū. Scd̄m p idē pz: nā qa f maior ē e sit m differētia f ad e. et ɔposita ex f g sit n: et ex e g sit o. per p̄cedētem eadem est differentia f ad e et n ad o. sed f maior est e in proportiōem k et n proportio ɔposita ex f g: maior ē proportiōe o ɔposita ex e g: in eadē proportiōe m. qd̄ ē scd̄m.

6 ¶ Datas proportiones: in minimis terminis cōtinuare.



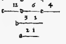
¶ Sint a ad b. c ad d. et e ad f: date proportiōes in mīmis terminis: quas in proportiōalitate ɔtinua in mīmis numeris assignare iubemur. capio mīmū quē nūerāt b c qui sit g. et quoties b ē in g: toties sit a in h. et per septimā secūdi tunc q̄ proportio a ad b: ea est h ad g. et quoties c est in g: toties sit d in k. per eādem septimam eadē erit proportio c ad d et g ad k. erūt ergo due ꝓportiōes a ad b et c ad d in ɔtinua ꝓportiōalitate in numeris h g k: et etiā in mīmis numeris. nā si in minoribus eē possint ɔtinue sint ergo vt in t v x. per decimānonam tertij b similiter et c nūerabit v. quare et p correlariū vicesimequarte tertij g mīm⁹ ab eis nūeratus etiā numerabit v. nō sunt igit t v x mīmi hoc pacto ɔtinuatiṽ ponebat. et si e numeraret aliq̄ties k: caperem l quem fm eūdē numeraret f. quare p septimā secūdi q̄ ꝓportio est f ad e: eadem est k ad l: sicq3 addita eēt tertia ꝓportio in ɔtinua ꝓportionalitate et in mīmis teris in mīmis quidē ꝓpter causam īmediate adductā. at qr k e non nūerat k: capio mīmum numerū quē numerant e et k qui sit m. et quoties k est in m scd̄m eūdē numerum sit g in n et h in o. Item quoties e est in m toties scd̄mq3 eūdē numerum sit f in p. et per septimam secūdi erit o ad n sicut h ad g. q̄re sicut a ad b. et n ad m: sicut c ad d. et m ad p: sicut e ad f. q̄re tres ꝓportiōes date sunt in ɔtinua ꝓportiōalitate in numeris o ad n/n ad m. et m ad p. et etiā in mīmis nomeris. nā si assignarētur minores: vt q r s y: per decimānonam secūdi b et c numerarent r. ergo g mīnus ab eis nūeratus p correlariū vicesime quarte tertij etiā numerat r. et cū que ꝓportio g ad k: ea sit r ad s: ergo pmutatim que ꝓportio g ad r ea est k ad s. sed g numerat r: ergo k numerat s. et etiā per decimānonam tertij e numerat s. quare et m mīmus ab eis nūeratus p correlariū vicesimequarte tertij numerabit s. nō sunt igit q/r/s/y mīmi: illas ꝓportiones ɔtinue retinētes: vt ꝓponebat. quare nulli tales erūt: p̄ter o n m p. qd̄ est ꝓpositum.

7 ¶ Numerum propositum per partes inequales fm assignatas ꝓportiones continue sumptas: diuidere.

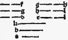


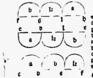
¶ Numerus datus is eē debet qui per numerum proportōes assignatas in mīmis ɔtinentem diuidi possit: alioquin in eo partes assignatis proportiōibus rñdētes inuenire eēt impossibile. Sit ergo iste nūerus datus a: quē ꝓpositum est diuidere in quattuor ptes inequales: quar pria ad scdam sit dupla scda ad tertiam sesqualtera et tertia ad quartam sesquitertia. ɔtinuo per precedetem tres assignatas ꝓ portiones scʒ duplam/sesqualterā/ et sesquitertiā in mīmis terminis qui sint b c d e: sitq3 totus ex ipis compositus b e. et quia a ex hypothesi diuidi potest per b e: diuidat ergo per b e sitq3 f: eritq3 f nūerus ex diuisione ꝓueniēs. duco b c d e in f et ꝓueniant g h k l qui p octauam secūdi ɔtinebūt easdē ꝓpor tiones cū b c d e: ita vt sit g ad h vt b ad c/ et h ad k vt c ad d/ et k ad l vt d ad e. et qr per decimam primi quod fit ex ductu b e in f: equat ei quod fit ex ductu b c/ c d/ et d e in f. et per sextam petitionem pmi du cto b e in f fit atq3 reuertitur a. est ergo a diuisus in quattuor partes inequales g h k l in ɔtinua ꝓpor tionalitate proportiones assignatas ɔtinētes. quod est propositum.

8 ¶ Quotlibet proportiōes quocūq3 ordine cōtinuate: eādem proportionem ɔstituūt.

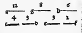


¶ Id primo in duabus ꝓportiōibus ostēdendū est. Sint ergo a b quecūq3 due ꝓportiones vt a dupla et b sesqualtera: et continuetur primo dupla sesqualtere in numeris c d e: ita vt dupla ꝓportio precedat: et sesqualtera sequat. erit enī c ad d duplus: et d ad e sesqualt. ɔtinuētur secūdo cedē ꝓportiōes in nūer is f g h: ita tn̄ vt sesqualtera p̄cedat et dupla sequat. erit enī f ad g sesqualter: et g ad h duplus. dico c ad d et d ad e: item f ad g et g ad h eādem cōstituere ꝓportiōem. Nam q̄ proportio g ad h ea est c ad d: et q̄ f ad g ea est d ad e. ergo p vicesimāscdam secūdi et equā ꝓportionalitatē indirectam: q̄ proportia f ad h eadem est c ad e. quod est propositum in duobus ɔclusum. In tribus aūt ꝓportiōib⁹ id adiuuātibus duabus ostēdit. vt si qua sit tertia ꝓportio q̄ ipsis ɔtinuāda sit: ɔtinuet ergo illis pmo in fine. vt e ad l sit ꝓportio k. et similiter h ad l. quia vt ostēsum ē: que ꝓportio f ad h: ea est c ad e. et que h ad l: ea e ad l. ergo p equā ꝓportiōalitatem q̄ proportio f ad l: ea est c ad l. et ita similiter p̄ponat. at si vni postponat vt e l sit proportio k postposita: et l f eadem p̄posita. qr que ꝓportio f ad h ea ē c ad e: et que l ad f ea est



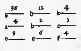


e ad l. ergo per indirectam proportionalitatem que proportio l ad h: eadem est c ad l. et si k interserantur duabus aliis ita ut c ad d sit proportio a: et d ad l sit k: et l ad e sit b. item f ad g sit b: et g ad l sit k: et l ad h sit a. que proportio l ad h ea est c ad d: et que g ad l ea est d ad l: et que f ad g ea l ad e. ergo per equam proportionalitatem directam que proportio f ad h: eadem est c ad e. et si hic postponatur k: illic vero interseratur ut sit in duabus ultimis figurationibus: quia que proportio d ad l ea est e ad l. et que l ad e ea est d ad e. ergo per indirectam proportionalitatem que proportio d ad e: ea est d ad l. addita ergo utrique eadem proportione c ad d: erit tota proportio c ad e: equalis toti c ad l. at proportio f ad h equatur proportioni c ad e: ergo et proportioni c ad l. quod est propositum. Et si de quattuor proportionibus id desideras adiuvantibus tribus adinvicem continuatis id efficere studeas. nam idem demonstrandi modus est.



Omnium duorum compositorum proportio que est unius ad alterum: est ex laterum suorum ad latera alterius composita proportionibus. 9

Latera compositi dicuntur numeri qui in seinvicem ducti: compositum producunt. Sint ergo duo compositi a b. et latera a: sint c d: c quidem maius et d minus. et latera b sint e f: e quidem maius / f minus. dico proportionem a ad b compositam esse ex proportionibus c ad e et d ad f. duco enim c maius laterum a: in f minus laterum b: et proveniat g. quia enim c in d facit a: et c in f facit g: ergo per septimam secundi que proportio d ad f ea est a ad g. et quia f in c facit g et f in e facit b: ergo per eandem septimam que proportio c ad e ea est g ad b. at proportio a ad b constituitur ex proportionibus a ad g et g ad b: ergo et ex proportionibus c ad e et d ad f. quod est propositum.



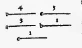
Si numeri continue proportionales in totidem alios continue etiam proportionales ducantur: et qui inde provenient continue proportionales erunt. 10

Sint a b c numeri continue proportionales tridem et d e f alii totidem continue proportionales: et ducatur d in a et proveniat g: et e in b et proveniat h: et f in c et proveniat k. dico productos g h k esse continue proportionales. Nam cum latera g sint d a: et latera h sint e b: et latera k sint f c: ergo per precedentem proportio g ad h constat ex proportionibus d ad e et a ad b. et proportio h ad k ex proportionibus e ad f et b ad c. sed proportiones e ad f et b ad c eedem sunt proportionibus d ad e et a ad b: ergo et proportio h ad k ex illis constans: eadem est proportioni g ad h. que igitur proportio g ad h ea est h ad k. quod demonstrandum erat et propositum.



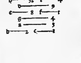
Numerum ita dividere ut que totius ad maiorem portionem: ea maioris ad minorem sit proportio est impossibile. 11

Si enim hoc pacto quisque numerus divideretur: diceretur dividi secundum proportionem habentem medium et extrema. hec itaque proponit nullum numerum secundum proportionem habentem medium et extrema dividi posse. Nam si aliquis hunc in modum dividi potest: sit ille a b qui sit divisus in a d minorem portionem et d b maiorem: sitque ut a b ad d b: ita d b ad a d. detraho ab maiori portione d b numerum c d equalem a d. et quia que proportio a b ad d b: ea est d b ad a d. et quia a d et d c equantur: que proportio totius a b ad totum d b ea est d b ad d c detracti ad detractum. ergo per quintam secundi que proportio a b ad d b: ea est a d ad c b residui ad residuum quare et eadem d c ad c b. quare iterum que proportio d b ad d c: ea est d c ad c b. capio iterum d e equalem c b. et quia sicut d b ad d c ita d c ad c b et d e equatur c b. ergo sicut d b ad d c totus ad totum: ita d c ad d e detractus ad detractum. quare per quintam secundi sicut d b ad d c totus ad totum: ita c b ad e c residuus ad residuum. quare iterum simili argumentatione detracto e c ab c b: erit residuus ad residuum perinde ut totus ad totum. atque hoc abibit in infinitum. quod per quartam petitionem est impossibile. certum est ergo numerum aliquem ita dividi non posse.



Numerum ex duobus constantem invenire: cuius ad maiorem proportio addet super proportionem eorundem data proportione minus. 12

Sint a b minimi termini proportionis date: a maior et b minor: et sit primo differentia a ad b numerus c et maior proportio a ad b quam b ad c: et sit d numerus constitutus ex duobus scilicet a et b quem dico minorem habere proportionem ad a maiorem eius portionem quam sit a ad b proportio assignata: sit e compositus ex b c. quia enim proportio a ad b primi ad secundum maior est quam b ad c tertii ad quartum: ergo per primam partem decimequinte secundi d ad b proportio maior quam e ad c. et per secundam partem eiusdem erit d ad a proportio minor quam e ad b. at cum e constituatur ex b et c differentia a ad b: equabitur ipsi a. ergo d ad a proportio minor quam a ad b. quod est propositum. Sit secundo ut minor sit proportio a ad b quam b ad c: capio quemcunque numerum maiorem a qui sit d: a quo detraho f equalem c et residuum sit e. et intelligo c detractum ab a et b residuum. et quia maior est proportio d ad a totius ad totum quam f ad c detracti ad detractum: ergo per decimamtertiam secundi: maior est proportio e ad b residui ad residuum quam d ad a totius ad totum. et ultra maior est proportio e ad b quam d ad a. ergo per duodecimam eiusdem maior est proportio e ad d quam b ad a. quare per undecimam eiusdem erit proportio d ad e minor quam a ad b. et cum e f constituant d: et e maior sit si si uterque e et f sit numerus constat d numerum ex duobus e et f constitutum esse quem querimus. quod si f sit unitas: duco aliquem numerum ut g in e et proveniat h: et in d et proveniat k et in f et proveniat l. per septimam secundi que proportio e ad d et d ad f: consimilis est h ad k et k ad l. et cum per nonam primi quod fit ex g in e et in f equetur ei qui fit ex g in d: ergo k constituitur ex duobus numeris h et l. quare k est talis numerus qui queritur.



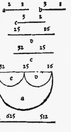
Duabus proportionibus inequalibus propositis: tertiam reperire que duplicata: minore sit maior / et maiore minor. 13

¶ Sint termini maioris ꝓportionis a b: ⁊ termini minoris c d: et a ⁊ c numeri maiores, ꝓpositūq; sit tertiam ꝓportionem reꝑire q̄ duplata: minore sit maior ⁊ maiore minor. ducam enī a in c ⁊ in d ⁊ ꝓueniant e f: ⁊ b in c et ꝓueniat g. manifestū est enī per septimam secūdi e esse ad f vt c ad d: ergo ꝑ octauam eiusdē e ad g eē vt a ad b. et quia e ad f minor est proportio q̄ e ad g: ergo ꝑ decimam secūdi f est maior g. deinde duco f in e ⁊ in se et in g et ꝓueniāt h/k/l qui ꝑ septimā secūdi erūt in ꝓportiōe e/f/g: vt scʒ h k sit vt e f/ et h l vt e g. deinde duco e in se et ꝓueniat m. tūc enī q̄a f in e facit h: et e in se facit m: ergo ꝑ octauam secūdi m ad h vt e ad f: quare et vt h ad k. Si ergo ꝓportio m ad k ex duabus ꝓportiōibus minori assignate equalibus ꝯstituta: sit minor ꝓportione h ad l quero aliquē nomerum vt o: qui in se ductus ꝓducat p maiorem h et minorem aut equalem m. et dico proportiōem o ad f esse cuius dupla maior est proportiōe c ad d ⁊ minor proportiōe a ad b. nam cū f in se faciat k/ et o in se faciat p: ergo ꝑ ea que in principio tertie p: opōnis huius demōstrata sunt est ꝓportio o ad f addita ad seipām. quare ex proportio p ad k dupla ad proportiōem o ad f. at cū p sit maior h ꝓportio p ad k per nonam secūdi maior est q̄ proportio h ad k. quare et proportiōe c ad d. et cū proportio m ad k minor eēt proportiōe h ad l/ etiā et proportio p ad k proportioni quidē o ad f assignate dupla minor eēt eadē ꝓportiōe h ad l: quare et proportione a ad b et propositū. at si proportio m ad k maior est proportiōe h ad l: sit ergo illaꝝ differētia m ad n. tūc enī proportio n ad k erit eq̄lis proportioni h ad l. ⁊ tūc querā aliquē nūerū vt o qui ductus in se ꝓducat p: maiorem quidē h sed minorem n. et argumētabor vt prius p: oportiōeʒ p ad k duplā quidē proportioni date o ad f maiorem eē proportiōe h ad k quare ⁊ proportiōe c ad d. ⁊ minorem eē proportione n ad k quare et proportione h ad l ex proportione a ad b. q̄d iteꝝ est ꝓpositū Hic tñ attende q̄ vbi non facile possis inuenire numerum similem o/ tunc duc k in h in se ⁊ in l: et iteꝝ h in se donec oportune talis numerus tibi occurrat.



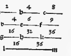
14 ¶ Qualibet proportiōem in duas diuidere: quaꝝ d̄ria sit data proportiōe minor.

¶ Sit b data proportio: propositūq; sit a alteram proportionem datam in duas ꝓportiōes diuidere: quaꝝ vnius ad alteram differentia sit data proportione b minor. capio ꝑ primam huius differentiam proportionis b ad a que sit c. Sic sit eq̄lis aut maior a/ oportet c minorem eē b. cū ꝑ diffinitiōem c eēt proportio qua b superet ꝓportiōem a. quare et a aut eque aut multo fortius minor eēt b. in quascūq; ergo duas proportiōes diuidatᷣ a: ille erunt minores a. nā eius ptes. quare et differētia vnius ad alteram (cū ea sit alteius partis portio q̄ sup alteram addit) minor erit altera partium: quare mīor toto a. quare ⁊ multo fortius minor toto b/ sicq; in quascūq; diuiderentᷣ a: haberetᷣ propositū. Ñ/ si ꝓportio c minor sit a inuenio ꝑ precedentem proportionem aliquā cuius dupla sit maior c/ et minor a. sitq; illa duplata proportio d. capioq; d̄riam d ad a ꝑ primam huius q̄ sit e quā dico eē minorem b. nā si ipsi eēt equalis: cū b c equētur a: ergo d que est maior c. cū e equali b maiorem proportiōem ꝯstituitᷣ q̄ sit a. nō ē ergo e differētia a ad d q̄d est ꝯtra hypothesim. Et si e eēt maior b multo fortius d et e maiorē ꝓportionem ꝯstituēt q̄ b ⁊ c. quare maiorem proportiōem q̄ sit a: q̄d iteꝝ eēt e nō esse d̄riam a ad d ⁊ ꝯtra hypothesim. Relinquitᷣ ergo proportiōem e esse minorem proportione b. et quia due proportiones d ⁊ e equātur proportioni a: intelligo proportiōem a in illas esse diuisam: et dico differentiam illaꝝ scʒ d ad e que sit f eē data proportione b minorem. nam si esset equalis b: cū b et d maiorem ꝯstituāt proportionem q̄ a vt dictum est etiā d et f maiorem ꝯstituerēt a: quare ⁊ d ⁊ e. quare f non eēt d̄ria d ad e et ꝑ idem f non potest esse maior b. cōstat ergo propōem a vt ꝓponit ꝓposito eē diuisam ⁊ ꝓpositum.



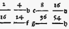
15 ¶ Si tres nūeri ꝯtinue ꝓportiōales: tribus aliis ꝯtinue ꝓportiōalibus comparētur: extremoꝝ ad extremos ꝓportiōes ꝯtinuate erunt tanq̄ mediorū ꝓportio duplicata.

¶ Sint a b c tres numeri ꝯtinue proportiōales: item d e f tres alij ꝯtinue proportiōales. dico ꝓportiones a ad d et c ad f adinuicem ꝯtinuatas: equari proportioni b ad e duplicate. duco enī c in a ⁊ in d ⁊ ꝓueniāt g/ h. et f in d et ꝓueniat k. eritq; per septimam secūdi proportio g ad h vt a ad d: ⁊ h ad k per octauam eiusdem vt c ad f. atq; proportiones a ad d et c ad f adinuicem ꝯtinuate per g h k et ꝑ tertiā huius addo proportiōem a ad d ꝓportioni c ad f ducēdo a in c et ꝓueniat l. et d in f et ꝓueniat m. manifestū est proportionem l ad m ꝯstitutā esse ex proportiōibus g ad h et h ad k: atq; ipsis simul sūptis equari. deinde duplo proportionem b ad e addendo per tertiam huius proportiōem b ad e sibiipsi ducendo scʒ b in se. et quia a b c sunt ꝯtinue proportiōales: ꝑ vicesimāsextam secūdi ꝓueniet l: ⁊ ducēdo e in se et ꝑ eādem vicesimāsextam secūdi ꝓueniet m. quare duplata proportio b ad e equatᷣ proportiōi l ad m que ꝓbata est equari p: oportiōibus g ad h et h ad k scʒ ꝓportiōibus a ad d et c ad f adinuicem continuatis. quod est propositum.

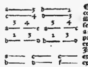


16 ¶ Si quattuor numeris cōtinue proportiōalibus alij totidem cōtinue proportiōales adaptentur: erunt proportiones extremorū ad extremos ꝯiūcte tanq̄ proportiones mediorum ad medios cōtinuate.

¶ Sint a/b/c/d: quattuor nomeri ꝯtinue ꝓportiōales: et e/f/g/h totidem alij ꝯtinue proportiōales. dico proportionem cōpositam ex proportiōibus a ad e et d ad h equari proportiōibus ꝯtinuatis b ad f et c ad g. ꝯtinuatis siquidē ꝓportiōibus b ad f et c ad g: vt in p̄cedenti factum est. ꝑ septimā ⁊ octauam secūdi hec ex tertia huius ⁊ vicesimaquīta secundi cognoscitur vt precedens ex vicesimasexta.

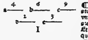


17 ¶ Si quotlibet numeri ad totidem alios comparētur: proportiōes coꝝ quolibet mō sumptorum eandem proportionem componunt.



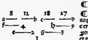
¶ In duobus nu̅eris id p̄mo videndum est. sint eni̅ a et b duo numeri / et c d duo alij qui duobus p̄mis compareni̅: dico eandem ꝓportio̅em ꝯpositam esse ex a ad b ⁊ c ad d / et ex c ad d et a ad b. Si eni̅ nu̅eri illi e̅e̅nt equales: statim de se notum e̅e̅t. Si̅l̅iter si duo primi e̅e̅nt equales inter se / et duo secu̅di inter se: et si̅l̅r si tres e̅e̅nt equales ⁊ vnus inequalis. sed esto proportio a ad b maior proportio̅e c ad d facio a ad b primam ꝓportio̅em / c ad d sc̄dam / ⁊ iteꝝ a ad b tertiam / ⁊ c ad d quartam. et quia q̄tum a ad b prima addit sup̄ c ad d sc̄dam tm̄ addit a ad b tertia supra c ad d quartam. ergo p̄ tertiā huiꝰ ꝯposita ex a ad b et c ad d prima ⁊ quarta equai̅ co̅posite ex c ad d et a ad b secu̅da et tertia. quod intendebai̅. Idem quoq̧ in tribus efficies. Sint a / c / e tres nu̅eri qui ꝯpareni̅ b / d / f. dico eandem compositam e̅e̅ ex a ad b / c ad d / et e ad f: et ex c ad d / a ad b / et e ad f. nam per immediate mo̅stratu̅ eadem e̅ ꝯposita ex a ad b et c ad d / et ex c ad d et a ad b: ergo ꝓportio̅e e ad f vtriq̧ addita: ꝓportio̅es erunt equales. q̄d erat ꝓbandum. dico item eandem e̅e̅ compositam ex a ad b / et c ad f / et c ad d: et ex e ad f / a ad b / et c ad d. Nam per nup̄ mo̅stratu̅ eade̅ est ꝓportio co̅posita ex a ad b et e ad f: et ex e ad f / ⁊ a ad b. ergo ꝓportione c ad d: vtriq̧ adiecta fiu̅t ꝓportio̅es a ad b / e ad f / et c ad d. item e ad f / a ad b / ⁊ c ad d: adinuicem equales q̄d ꝓponebai̅ ꝓba̅dum. Et ita alias ꝯbinatio̅es ꝓba et adiuu̅ctibus tribꝰ: de q̄ttuor expedi Et ita consequenter. ¶ Quinti elementoꝝ Arithmetices Iordani finis.

Altera numeroꝝ dicitur: quoꝝ multiplicatio̅e: numeri ꝓducu̅tur. Supfici-
1 alis appellai̅ numerus: qui duobus lateribus connectur. Solidus v̄o qui sub tribus: ex quoꝝ ꝯtinua multiplicatione habet ꝓcreari. Quadratus est numerus supficialis equalibus lateribus co̅te̅tus. Altera parte longior: est cuius latera sunt ineq̄lia sed sola vnitate dista̅tia. Cubus est numerus solidus equalibus consistens in lateribus. Similes dicu̅tur numeri siue supficiales siue solidi: quoꝝ latera sunt proportionalia.



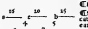
¶ Si tres numeri fuerint in sua proportione mi̅imi: duo extremi erunt quadrati. 1

¶ Sint a b c tres nu̅eri co̅tinue proportio̅ales in sua ꝓportio̅e mi̅imi: dico a esse numerum quadratu̅ atq̧ si̅l̅iter c esse numerum quadratum. Na̅ per septima̅ quarti erit vnus medius ꝓportio̅alis inter a ⁊ vnitate̅ qui sit d: et si̅l̅iter vnus inter c et vnitatem qui sit e. quia ergo quoties vnitas in d toties d est in a: ergo d in se ductus multiplicat / atq̧ ꝓducit a. est ḡ a quadratus. nam d ⁊ d eius latera sunt equalia Et q̄r etiam quoties vnitas in e toties e est in c: ergo e in se ductus ꝓducit c. quare c etiam quadratus. quod est propositum.



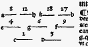
¶ Si fuerint quattuor numeri in sua proportione mi̅imi: duo extremi erunt cubi. 2

¶ Sint a / b / c / d quattuor numeri ꝯtinue proportio̅ales: in sua proportio̅e minimi. dico a cubum esse atq̧ d cubum esse. Nam p̄ septimam quarti eru̅t duo medij proportio̅ales inter a et vnitatem qui sint e et f: et si̅l̅r duo inter d ⁊ vnitatem qui sint g et h. et quia quoties vnitas in e toties e in f: ergo e in se ꝓducit f. et quoties vnitas in e toties f in a: ergo e in f suu̅ quide̅ quadratu̅ ꝓducit a. est igii̅ a cubus. et per idem quia qaoties vnitas in g toties g in h: ergo g in se ꝓducit h. et quoties vnitas in g toties h in d: ergo g in h suum quadratum: ꝓducit d. quare etia̅ d cubus. quod est propositum.



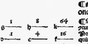
¶ Omnis q̄drati ad quadratu̅ est tanq̄ lateris ipius ad latus alterius ꝓportio duplicata. 3

¶ Sint duo quadrati a et b: ⁊ latus a sit c / et latus b sit d. dico proportio̅em a ad b e̅e̅ tanq̄ proportio c ad d duplicata. duco eni̅ c in d ⁊ fiat e. et erit p̄ septimam secu̅di a ad e sicut c ad d. et p̄ octauā eiusdeꝫ e ad b vt c ad d: est ergo a ad e vt e ad b. at proportio a ad b constat ex ꝓportio̅ibꝰ a ad e et e ad b: quaꝝ quelibet equatur c ad d. est ergo a ad b tanq̄ ꝓportio c ad d duplicata: vt ꝓponebatur.



¶ Proportio cubi ad cubu̅: est tanq̄ lateris ad latus triplicata. vnde manifestum est inter quoslibet duos quadratos vnu̅: atq̧ inter cubos duo ꝓportio̅ales medios ꝯsistere. 4

¶ Sint duo cubi a ⁊ b. et latus a sit c: et latus b sit d. sitq̧ e quadratu̅ c / et f quadratu̅ d. inter quos ex demo̅stratione precede̅tis est vnus medius ꝓportio̅alis qui sit g. dei̅n duco c in e et certu̅ est ꝓuenire a: et e in g et ꝓueniat h: et d in f et certu̅ est ꝓuenire b: et d in g ⁊ ꝓueniat k. manifestu̅ est ex precede̅ti eandem esse proportionem e ad g et c ad d: et ea̅dem g ad f et c ad d. sed p̄ septima̅ secu̅di a ad h vt e ad g. quare vt c ad d: et per octauam eiusdem h ad k vt c ad d. et per septimam eiusde̅ k ad b vt g ad f. q̄re vt c ad d. est igitur quelibet trium proportionum a ad h / h ad k / et k ad b alteri equalis: atq̧ equalis c ad d. sed proportio a ad b ꝯstat ex illis tribus. est igii̅ proportio a ad b tanq̄ ꝓportio c ad d triplicata. Et correlarium ex modo demo̅strationis cognitum est ⁊ propositum.



¶ Quoꝝ latera ꝓportio̅alia sunt quadratos ꝓportio̅ales e̅e̅: atq̧ si quadrati ꝓportionales sunt: et latera ꝓportionalia esse necesse est. 5

¶ Sint a / b / c tres numeri ꝯtinue proportio̅ales: quoꝝ quadrati sint d / e / f. dico quadratos d / e / f esse ꝯtinue proportio̅ales. Ite̅ dico si d / e / f sunt ꝯtinue proportio̅ales: ⁊ a / b / c eoꝝ latera e̅e̅ proportio̅alia. Prima pars statim ex decima qui̅ti cognoscitur. et sc̄da ostendii̅. Nam quia proportio d ad e p̄ nonā quinti est composita ex ꝓportio̅ibus a ad b ⁊ a ad b: et si̅l̅r ꝓportio e ad f ꝯposita ex ꝓportio̅ibus b ad c et b ad c: s̄ ꝓportio̅es a ad b et b ad c sunt equales. alioquin p̄ quintam eiusdem singulis addite sue equales non ꝯstituere̅t d ad e et e ad f proportiones equales. q̄d est ꝯtra hypothesim.

6 ¶ Si cubi fuerint proportiõales: erunt ⁊ latera ꝓportionalia. ꝙ ſi latera ꝓportiõalia fuerint: cubi quoqꝫ proportionales erunt.

¶ Sit hypotheſis ea ꝙ̄ prius: ſed g/h/k ſint cubi numeroꝝ a/b/c. Scđa pars huiꝰ patet ducendo a b c ꝯtinue proportiõales in d e f ſuos quadratos qui ꝑ primam ptem ꝓcedentis ſunt ꝯtinue ꝓportiõales et ꝓducẽt g h k qui ꝑ decimam quinti ſunt ꝯtinue proportiõales. qđ eſt ſcđm. Et pͥma pars declarat̃ Nam per nonam quinti proportio g ad h ꝯpoſita eſt ex proportiõibus d ad e ⁊ a ad b. et ꝓportio h ad k cõpoſita ex proportiõibus e ad f ⁊ b ad c. et ſi a ad b et ad c nõ ſunt ꝓportiõabilia: neqꝫ d e f. ſi ergo a ad b maior ſit proportio ꝙ̄ b ad c: ergo per quintam quinti maior erit d ad e ꝙ̄ e ad f. ergo per eandem quintam g ad h ꝯſtituta ex d ad e et a ad b maioribus ꝓportionibus erit maior ꝙ̄ h ad k. nõ ſunt igit̃ g h k proportionales. quod eſt ꝯtra hypotheſim ⁊ totum propoſitum.

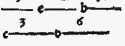
7 ¶ Quo abũdat quadratꝰ ſuper quadratũ eſt nũerus ex lateribus ipſoꝝ coaceruatus et ſcđm laterum differentiam multiplicatus.

¶ Sint a ⁊ b duo quadrati: a maior/ et b minor. ſitqꝫ c latus a: ⁊ d latus b. dico numerum quo a ſupat b eſſe numerum qui ꝓcreat̃ ex ductu differẽtie c ad d in coaceruatum c d. Intelligo enĩ coaceruatum c d eſſe diuiſum in c maiorem numerum: ⁊ d minorem. et quia ꝑ decimãoctauam pͥmi quod fit ex d in ſe: cũ eo quod fit ex differẽtia c ad d in coaceruatum c d: equũ eſt ei quod fit ex c in ſe. ſed qđ fit ex c ĩ ſe eſt quadratũ maius a: ⁊ qđ fit ex d in ſe eſt b quadratũ minus: ꝗ̄ b quadratũ minus ſupat̃ ab a q̄drato maiore in eo nũero ꝗ̄ fit ex dr̃ia c ad d in coaceruatũ c d. abũdat ꝗ̄ a ſuꝑ b in eodẽ nũero. qđ ē ꝓpoſitũ.



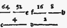
8 ¶ Si quadratus quadratum numeret: et latus ſuũ latus alterius nũerabit. ꝙ ſi latus a latere numerabitur: et quadratus a quadrato numerabitur.

¶ Sint a b duo quadrati/ et a numeret b: ſitqꝫ c latus a ⁊ d latꝰ b. dico c nũerare d. dico ꝗ̄ ſi c nũerat d: etiã a numerare b. ſit enĩ ꝑ correlariũ quarte huius e medium proportiõale inter a ⁊ b: erũt enim a ad e et e ad b in ꝯtinua proportiõe vt c ad d. ſed a primus numerus ꝑ hypotheſim numerat b vltimũ: ergo per decimãtertiã quarti: a pͥmus nũerat e ſcđm. quare c numerabit d. qđ eſt pͥmũ. Scđm ꝓ: nã ſi c nũerat d: ꝗ̄ ⁊ a nũerat e ⁊ e nũerat b. ꝗ̄re ꝑ viceſimãtertiã pͥmi a nũerabit b. qđ ē ſcđm ⁊ totũ ꝓpoſitũ



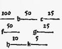
9 ¶ Si cubus cubum nũeret: ⁊ latus ipſius latus alterius numerabit. ꝙ ſi latus nũerat latus: et cubus cubum numerabit.

¶ Quod de quadratis modo oſtenſum eſt/ hic de cubis demõſtrandum ꝓponitur. Et pͥma ꝑ poſitis medijs ꝓportiõalibus int̃ cubos ꝑ correlariũ quarte huius vt pͥma ꝓcedetis cognoſcit̃: ⁊ ſcđa vt ſcđa.



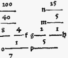
10 ¶ Trium numerorum cõtinue proportionalium: ſi primus fuerit quadratus: tertium quoqꝫ quadratum eſſe neceſſe eſt.

¶ Sint a b c tres numeri ꝯtinue proportionales: et ſit a quadratus: dico c eē quadratum. ſint enĩ d e minimi in proportiõe a ad b per decimãnonam tertij d numerabit a. ſitqꝫ id ſcđm f. ⁊ e etiam per eãdem numerabit c. cũ per hypotheſim eadẽ ſit proportio a ad b ⁊ b ad c: ſit ergo id ſcđm g. et quia a ponitur quadratus: ſit ergo eius latus h. qđ enĩ h in ſe tm̃ eſt ꝗ̄tum d in f: ergo ꝑ ſcđaꝫ ptem viceſimeſexte ſcđi d/h/f ſunt ꝯtinue proportiõales. et ꝑ nonam quĩti ꝓportio a ad c: ꝯpoſita ex proportiõibus d ad e ⁊ f ad g. ergo q: a ad b vt d ad e: erit b ad c vt f ad g. eſt ergo d ad e vt f ad g. ergo ꝑmutatim d ad f ſicut e ad g. ergo per duodecimam quarti inter e et g tot media proportiõalia cadũt: quot inter d ⁊ f. at int̃ d et f cadit h vnũ medium ꝓportiõale: igit̃ ⁊ inter e et g cadet vnũ ꝙ ſit k. et q: ex e in g poſitũ eſt fieri c: ergo ꝑ viceſimãſextam ſecundi ex k in ſe fiet idem c. eſt igit̃ c quadratus. quod erat demonſtrandum.



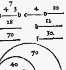
11 ¶ Si q̄ttuor numeroꝝ ꝓportiõaliũ pͥmus fuerit cubus: quartũ ꝗ̄qꝫ cubũ eē ꝯueniet.

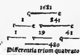
¶ Sint a/b/c/d quattuor nũeri ꝯtinue proportiõales: quoꝝ a pͥmus ſit cubus. dico d quartũ eē cubũ. ſicut enĩ e/f/g/h quattuor in eadem proportiõe minimi: erũtqꝫ per ſcđam huiꝰ e ⁊ h cubi. et q: e ⁊ a ſunt cubi: erũt ꝑ correlariũ quarte huius duo proportiõales medij inter e et a qui ſint k l. et quia ꝑ equam proportiõalitatem que ꝓportio e ad h ea eſt a ad d: ergo ꝑmutatim ꝗ̄ ꝓportio e ad a: ea eſt h ad d. ſed inter e et a ꝓbati ſunt eē duo ꝓportiõales medij. ergo ꝑ duodecimam quarti ⁊ int̃ h ⁊ d duo ſiĩr erũt ꝓportiõales medij qui ſint m ⁊ n. et q: ꝑ decimãnonam tertij h nũerat d: ergo per ſcđam ptem decime tertie quarti h numerabit m. Sit igit̃ o latus cubi h: ſitqꝫ quoties h in m toties o in p. q: igit̃ ꝓportio d ad h tanꝗ̄ m ad h triplicata: erit eadẽ ꝓportio d ad h tanꝗ̄ ꝓportio p ad o triplicata. et q: ꝑ quartã huius eadem eſt ꝓportio int̃ cubum p et cubũ h. erit igit̃ d cubus: ⁊ eius latus erit p. qđ eſt ꝓpoſitũ.



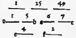
12 ¶ Quadratos tres inueſtigare: quoꝝ ꝯtinue ſumptoꝝ differentie ſint equales.

¶ Sit c duplum cuiuſlibet numeri. addat̃qꝫ c cuilibet nũero vt b. ſitqꝫ a ꝯpoſitus ex b c. et ex a ⁊ b fiat d. et ex c in a ⁊ in b fiãt h ⁊ k. et ex a ⁊ b in d fiant e et f. et ponatur numerus l/m/g equalis numero e: ita vt g ſit equalis f. quia enĩ e/ et l/m/g equãtur: et ex a in d fit e: etiã ex a in d fit l/m/g. ſed g equatur f qui fit ex b in d: ergo reſiduũ l et m per decimam primi equũ eſt ei ꝗ̄ fit ex c in d. quare ꝑ nonã eiuſdeꝫ l et m ſunt tanꝗ̄ h et k. Sit ergo l equalis h: et m equalis k. dico ergo l g poſſe diuidi in duo equalia. Nam cũ b in d fiat g: et d ſit tanꝗ̄ b bis ⁊ c: ⁊ teꝝ b in ſe bis. hoc eſt in ſuũ duplum. et in c facit g. ⁊ a in c facit l. erũt ergo l g tanꝗ̄ qđ fit ex b in ſe bis. et a b (quod eſt d) in cuiꝰ dimidiũ eſt quod fit ex b in ſe ſemel: et ex d in dimidium c. eſt ergo numerus l g in duo media eidẽ dimidio eq̄lia diuiſibile. diuido



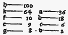


Differentia trium quadratorum continue eadem

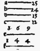


ergo l g in duo media eq̄lia:sitq; r differētia vni⁹ illoꝝ dimidioꝝ ad g.et v numerus equalis dimidio. et q differētia dimidiū l g:ad totū l m g.dico tres q̄dratos numeroꝝ r.v.t q:q̄ sint r e:v e:q e:eē qui ꝑ ētur. Nam cū differētie quadratoꝝ sint ꝑ septimam huius q̄ ex differētijs laterum in ꝯposita ex ipsis ꝓducitur:ꝯtinue videbis ex dr̄ia r ad v in ꝯpositū r v qd̄ est g.et ex dr̄ia v ad q in ꝯpositum v q qd̄ est l m g:eq̄lem numerū ꝓduci ꝑ vicesimamquitam secūdi q̄ eadem sit ꝓportio differētie r ad v ad dr̄iam v ad q.sicut aggregati q v ad aggregatum r v.sive sicut l m g ad m g:quod idem est. Sed hoc vltimum facilius forte capies in minoribus numeris ꝛ eodē ingenio inuentis.vt sit a senarius.et ꝓximi hinc ꝛ inde sint b ꝛ c.b minor:ꝛ c maior.certū est b eē quinariū:cuius dr̄ia ad a sit d.quā certū est eē vnitatē sitq; e differētia d ad b vnitatis ad quinariū:quā ꝯstat esse quaternarium.sitq; f differētia b ad c.que quis dupla differētie b ad a:ideo erit binarius.est itaq; e ad f duplus.sed d b per ꝯceptiōem sunt a.et per scd̄am primi b c simul sunt duplus ad a.igit̄ et b c simul:sunt duplus ad d b.quare que ꝓportio e ad f differētie ad differentiam ea est aggregati b c ad aggregatum d b.ergo per vicesimāquitam scd̄i tū est quod fit ex e in d b q̄tum qd̄ ex f in b c.ergo per septimam huius tres quadrati numeroꝝ d b ꝛ c sunt quales propositi sunt inueniri possibiles.quod est propositum.

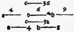
Numerum quadratū inuenire: q̄ cū quadrato dato numerum quadratū ꝯstituat. 15



Sit ꝓmo datus nūerus quadratus a:qui diuisibilis sit in duo equalia.cuius medietas sit b.latus aūt eius sit c.sitq; d binarius.quia ergo qd̄ fit ex d in b:equale ei quod fit ex c in se:erit ꝑ vicesimāsextā secūdi c ꝓportiōaliter medius inter binarium ꝛ b.et quia d binarius est numerus primus: ꝛ ꝑ primā quarti cōicat cū c ꝛ c cū b:etiā d cōicabit cū b.ꝑ ꝓmā ꝯ tertij d nūerabit b.cuius q̄de b:medietas sit e. et nūeri circūpositi sint f maior ꝛ g minor:quoꝝ q̄drata sint h ꝛ k.dico q̄ quadratū h eē tanq̄ numerū quadratum k:numero quadrato a additum. Nam differētia f ꝛ g ē binarius ꝛ ꝯpositus ex ipsis per secūdam primi est b.et quia ex binario in b per hypothesim fit a:ergo per septimam huius cū a fiat ex differētia laterū in cōpositū ex ipsis a est dr̄ia q̄dratoꝝ h ꝛ k.q̄drat⁹ ergo k additus quadrato dato a ꝯstituit numerum quadratum h.qd̄ est ꝓpositum. Sed esto secūdo vt sit quadratus a assignatus:sed in duo equalia partiri nō possit.cū ergo binarius eum nō numeret:et sit binarius numerus primus: ergo per primam tertij binarius ad ipm erit primus.quare ꝑ decimāquintam tertij binari⁹ nūerabit inferiorem numerum quadrato a:vnitate dempta qui sit b.cuius medietas sit c:ꝛ maior eo vnitate sit d:cuius quadratus sit e:et quadrat⁹ c sit f.dico ergo quadratum e abūdare sup quadrato a q̄tum est f quadratus c.Nam quia c bis cū vnitate ꝯstituit a:ergo per decimāoctauam primi quod fit ex c in se cū eo qd̄ fit ex a in dr̄iam d maioris partis ad c:equū est ei qd̄ fit ex d maiore parte in se.excedit igitur quadratus d quadratum nūeri c in quadrato dato a.nam differētia d ꝛ c erat vnitas.qd̄ est ꝓpositū.



Si quadratus in quadratum ducatur:ꝓducet̄ quadratus. Si ꝟo in non quadratū non quadratus ꝓueniet. Unde pz si quadratus quadratum numeret:ipm secundum quadratum numerare. 14

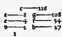


Sint ꝓmo a ꝛ b duo quadrati:ducaturq; a in b et ꝓueniat c.dico c eē quadratū. Nam ꝑ correlariū quarte huius int̄ a et b est vnus ꝓportiōalis medius.sit ergo ille d.quia ergo a d ꝛ b sūt ꝯtinue ꝓportiōales:ergo ꝑ vicesimāsextam secundi quod fit ex a in b:equū est ei qui fit ex d in se.at quod ex a in b ꝓducitur est c.est igitur c quadratus.qd̄ intēditur. Secūdo:sit a quadratus ꝛ b non quadratus:ducaturq; a in b et ꝓueniat c:dico c non esse quadratum. Nam si c esset quadratus ꝑ scd̄am ꝑtem vicesime sexte secundi latus quadrati c eēt medius proportiōalis inter a ꝛ b.quare cū a primus sit quadratus ꝑ decimā huius ꝛ b eēt q̄dratus.qd̄ est ꝯtra hypothesim. Correlariū ex his duabus ꝑtib⁹ satis ꝯstat.

Quadratus non quadratum:scd̄m non quadratum numerat. 51

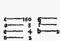
Nam si ponat̄ possibile quadratū scd̄m quadratū:ipm numerare:ergo per primam ꝑtem ꝓcedētis ꝓductus erit quadratus.at ponitur q̄dratus numerare nō quadratum:sequitur igitur ex hoc ꝯtrariū hypothesis.quod est propositum.

Si cubus in cubum ducatur:qui producetur erit cubus. 16



Sint a b duo cubi:ꝛ ducatur a in b et ꝓueniat c:dico c esse cubum. Sumo enī latus cubi a quod sit d:et quadratum lateris d q̄ sit e.manifestum est d ꝛ e eē proportiōales inter vnitatem et a.et q: q̄ties vnitas in a toties b in c.cū a multiplicet c scd̄m b.per decimāquartam quarti quot medij ꝓportiōales erūt inter vnitatem ꝛ a:totidem erūt inter b et c. sunt ergo duo medij similiter proportiōales int̄ b et c q̄ sint f g.cū ergo b f g c sint quattuor numeri ꝓportiōales:et b primus per hypothesim sit cubus: ergo per vndecimam huius ꝛ c quartus erit cubus.quod est propositum.

Si in non cubum cubus ducatur:producetur nō cubus. Ex quo liquet q̄ si cubus cubum numeret:ipm scd̄m cubum numerare. 17



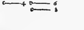
Ducatur a cubus in numerum b nō cubum et ꝓueniat c:dico c non esse cubum. Nam si c ꝓductus ponatur eē cubus:manifestum est vt in precedenti per decimamquartam quarti quot medij ꝓportiōales erūt inter vnitatem et a:totidem esse inter b ꝛ c.sint ergo similiter duo scilꝫ f ꝛ g.quia ergo c g f b sunt ꝯtinue proportionales:ꝛ c est positus cubus.ergo per vndecimam huius:b etiam erit cubus. at b per hypothesim positus ē non cubus:accidet itaq; ꝯtrariū hypothesis.qui igitur inde ꝓducetur:nō erit cubus.quod est propositum. Correlarium satis ex hac ꝛ precedenti cognitum est.

Si non cubum cubus numeret:scd̄m non cubum eum numerabit. 18

¶ Nā si ponaṫ numerari ſm cubū:ꝑ penultimā qui ꝓducetur erit cubus. at positus est nō cubus nō itaq ipsum numerabit ſm cubū:quare si ipsum cubus numeret:ſm nō cubū nūerabit:qd̄ intēditur.

19 ¶ Si quadrati cōmunicant:latera quoq cōmunicabunt. si vero quadrati sint incommensurabiles:et latera ipsorum incōmensurabilia erunt.

¶ Sint a b duo quadrati et c latus a et d latus b: dico primo si quadrati a b cōicant et eorū latera c d cōicare. nā si c d nō cōicant:ergo per duodecimā tertij neq quadrati a b cōicabunt. ex opposito igitur ꝯñtis si quadrati cōicabunt ⁊ eoꝝ latera cōicant. dico scd̄o si quadrati a b non cōicant neq eoꝝ latera cōicare. nā si c d latera cōicant est aliq̄s nūerus eos cōiter numerās q̄ sit e:qz ergo e numerat c ergo ꝑ vicesimātertiā primi etiā nomerat a. et qz etiā e nūerat d:ꝑ eandē vicesimātertiā nūerabit et b. si ergo latera sont cōmunicātia et quadrati cōicant: quare ex opposito ꝯñtis si quadrati non cōmunicāt neq latera cōmunicabunt:quod est secundū ⁊ totum propositum.

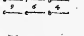


20 ¶ Si cubi fuerit ꝯmēsurabiles ⁊ laṫa. q̄ si cubi nō cōicent:neq ipsoꝝ latera cōicabūt

¶ Huius prima pars vt precedentis prima ⁊ secunda vt precedentis secunda patescunt.

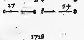
21 ¶ Si quadrati ad aliquem fuerit proportio tanq̄ quadrati ad quadratum illum aliquem:quadratum esse necesse est.

¶ Sit a quadratus qui ad aliquē numerū vt b eam habeat ꝓportionē que quadrati c ad quadratū d dico b esse numerū quadratū. nā qz c et d sunt quadrati per correlariū quarte huius est vnus medius ꝓportionalis inter c et d qui sit e. ⁊ qz que ꝓportio c ad d ea est a ad b:ergo per duodecimā quarti erit vnus medius proportionalis inter a et b qui sit f. qz ergo a f b sunt ꝓportionales ⁊ a prim⁹ positus ē quadratus:ergo per decimā huius et b tertius est quadratus: quod est propositum.



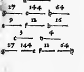
22 ¶ Quicunq se hz ad cubū sicut cubus ad cubū: idē ex necessitate erit cubus.

¶ Si ad a numerū cubum se habeat aliquis numerus vt b sicut d cubus ad c cubū: dico b esse cubum nā per correlariū quarte huius inter c et d erunt duo medij ꝓportionales. et cū que ꝓportio c ad d ea sit a ad b. ergo per duodecimā quarti cadent cōsimiliter duo medij ꝓportionales inter a et b:et a primus ponitur cubus erit igitur et b per vndecimā huius cubus quod erat demōstrandum.



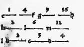
23 ¶ Si quadratus in quadratum vel cubus in cubum ducatur:latus producti erit numerus qui ex latere vnius in latus alterius producitur.

¶ Sint primo duo quadrati a b:et latus a sit c:et latus b sit d. ducaṫ q̄ a in b:et ꝓueniat e q̄ per decimāquartā huius erit quadratus:et ducaṫ c in d:et ꝓueniat f. dico f esse tetragonicū latus e. nā per septimā et octauā secundi f est medius ꝓportionalis inter a ⁊ b. et ꝑ vicesimāsextaz eiusdē qd̄ fit ex a in b equū est ei q̄ fit ex f in se. ē igiṫ f latus quadrati e qd̄ erat ꝓbandū. scd̄o sint g et h cubi laterū c et d ⁊ g in h ꝓducat k q̄ per decimāsextā huius erit cubus. dico f esse latus cubicū k. qz enī c in a ꝓducit g et f in se ꝓducit e erit ꝑ nonā quinti ꝓportio g ad e cōposita ex ꝓportionib⁹ c ad f et a ad f. et qz iterū ex c in d fit f:et ex d in b fit h erit per eandē nonā ꝓportio f ad h cōposita ex ꝓportionib⁹ c ad d et d ad b:sz c ad d est sicut a ad f:sed et permutatī d ad b sicut c ad f:q̄ eadē esset ꝓportio c ad d et f ad b. est igitur ꝓportio f ad h equalis ꝓportionibus a ad f et c ad f:quare ꝓportioni g ad e. ordinatis ergo quattuor nūeris g e f h:qz que ꝓportio g ad e ea est f ad h. ergo ꝑ vicesimāquintā secundi idē est nūerus q̄ ꝓducitur ex g in h et ex f in e suū quidē quadratū quare ꝓducti cubi k latus ē f:qd̄ est totū propositū.



24 ¶ Si dispositis ab vnitate numeris quadratis:ꝓportionaliter medij inter proximos quosq sumantur:fient omnes parte altera longiores. et cuiuslibet illorum ad illos differentiam lateri suo equalem esse constabit.

¶ Sint e f g h quotlibet nūeri quadrati ab vnitate ꝯñter dispositi:eoꝝ vero latera vnitas:et b c d numeri ꝯñter ab vnitate sumpti. dico medios ꝓportionales inṫ proximos quosq quadratos sumptos eē altera pte lōgiores. duco enī vnitatē in b ⁊ ꝓueniat k q̄ est medius ꝓportionalis inter e ⁊ f. et qz eius latera vnitas et b sunt inequalia sola vnitate distātia:ꝑ diffinitionē k est altera pte longior. sic duco b in c et ꝓueniat l q̄ erit medius ꝓportiōalis inṫ proximos quadratos f g. et per idē vt prius altera pte longior. et ita de reliq̄s ꝓportionali⁹ medijs proximoꝝ quadratorū quotquot ꝯñter assignati fuerit quadrati. Dico preterea differentiā k ab quadrato f equalē esse b lateri f:et differentiā l a quadrato g esse equalē c lateri g:et ita cōsequenter. qz enī b superat vnitatē sola vnitate:intelligo ergo b diuisum in duas vnitates. et qz b in se facit f:ergo per decimātertiam primi b ductus in primā ⁊ secundam vnitatem procreat equū f:sed subtracto qd̄ fit ex b in vnaṁ vnitate remanet k. est igitur subtractū eius qd̄ fit ex b in vna vnitate differētia k ad f:sed et idem subtractū est equale b:q̄ vnitas in quēcunq numerum ducta idem faciat. constat ergo id esse verum de k. de l autem consimiliter ostenditur:qz c excedit b sola vnitate. diuido ergo c latus scilicet quadrati g in b et vnitatem. ⁊ quia c in se facit g et idem c in b et vnitatem facit equale g:per eandem decimātertiam primi:et subtracto eo qui fit ex c in vnitatem remanet l. differentia igitur l et g est quod fit ex c in vnitatem: sed ⁊ illud est equale c per idem quod prius. constat igitur propositum de altera parte longiore l. et ita de quibuslibet alijs argumentaberis. Similiter etiam ostendes differentiam k ad e esse vnitatem:et differentiam l ad f esse b et m ad g esse c. Nam cum b sola vnitate superet vnitatem:intellecto ergo b in duas vnitates diuiso per decimāmquartam primi quod fit ex b in alteram vnitatum equale est et qui fit ex illa in se:⁊ illa in alteram. sed



qđ fit ex illa vnitate in se est quadratū e τ vnitas. et qđ fit ex illa in alterā illđ est vnitas et equalevnitati. constat ergo dr̄iam l; ad e esse vnitatē. Similiter diuido c in duas partes scȝ vnitatē τ b: et q2 per eandē decimāquartam primi quod fit ex c in b scȝ l: equū est ei qui fit ex b in se q̄ est quadratus f τ ex b in vnitatem qui est latus b. constat ergo differentiā l ad f esse b: et ita per decimāquartam primi de singulis ostende. constat ergo totum propositum.

Si sumantur ab vnitate numeri altera parte longiores proximis quibusq; coniunctis: dimidiis coniunctorum sumptis prouenient omnes quadrati 25

At parte altera lōgioribus figuratis quēadmodū in supiori factū est: dico l; et l altera lōgiorū simł sumptoꝝ medietatē esse quadratū. Similit̄ l et m simul sumptoꝝ medietatē esse quadratū τ ita binoꝝ et binorū ꝯtinue sumptoꝝ quotquot essent: medietatē esse tetragonicā. Nam q̄a per secundā partem p̄cedentis monstratū est dr̄iam l; minoris ad f esse b: et l maioris ad f etiā esse b: l; et l sunt circūpositi atq; equidistātes f. ergo p secūdā primi f est numeroꝝ l; et l simul sūptorū medietas. at f cognoscit̄ eē quadratū: ergo de l; et l constat ꝓpositum esse verū. et cōsimiliter de l τ m cōstabit: q2 eoꝝ differentia ad g per p̄cedentē est c latus g: quare per secundā primi concluditur quadratus g esse numeroꝝ l et m simul iunctorum medietatem.



Nullus altera parte longior est quadratus vel cubus. 26



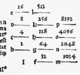
Nā si aliq̄s altera pte longior vt a esset quadrat⁹: per diffinitionē eius latera essent equalia. et q̄a esset altera pte longior eius latera sola vnitate distarēt. si ergo illa dētur et sint b maior τ c minor: q̄a etiā a esset quadrat⁹ sit eius tetragonicū latus d. et q2 qđ fit ex b in c est equale ei q̄ fit ex d in se: ergo p vicesimāsextā secundi b d c sunt cōtinue ꝓportionales qđ est īpossibile. Nam cum b et c sola vnitate distēt inter b τ c nullus cadit nūerus medi⁹. sed h̄ dicat aduersari⁹ d eē equale b aut c. cū ergo b c d cōtinue ꝓportionēt oportet b et c esse equalia qđ est cōtra hypothesim. At dicat d esse maiorē b τ c. tūc ergo b ad d est ꝓportio mīoris nūeri ad maiorē: τ d ad c ꝓportio maioris ad minorē. et ille ponūt eedē hoc aūt īpossibile. At dicat vltio d vtroq; et b τ c esse minorē: et tūc ꝓportio b ad d ē maioris ad minorē et d ad c mīoris ad maiorē: τ ponunt eedē hoc itez īpossibile nō est igit̄ a altera pte lōgior quadratus qđ est primū. ostēdo deinde a altera pte longiorē nō esse cubū. nā si id possibile ē sit a altera pte lōgior cubus τ eius lat̄a sint: maius quidē b et minus c et quadratū b sit d τ quadratū c sit e: sitq; f latus a in eo q2 cubus: cui⁹ quadratū sit l;. erit eni p correlariū quarte hui⁹ vnus medius ꝓportiōalis int̄ d et l; q̄ sit g. et p idē vnus int̄ e τ l; q̄ sit h: τ p septimā secundi q̄ ꝓportio b ad f ea est d ad g: et g ad l;. et sit̄ q̄ ꝓportio c ad f ea erit e ad h et h ad l;. et q2 ex l; in f fit a τ idē fit p hypothesim ex b in c: ergo p scđaꝫ partē vicesimequinte secūdi erit l; ad b sicut c ad f. τ etiā pmutati l; ad c sicut b ad f. erūt igit̄ inter d τ c cōtinue ꝓportionales g et l; τ sit̄ inter e τ b. itidem duo h et l;. et q2 b τ c vel erunt ꝯmēsurabiles vel cōtra se p̄mi. si ꝯmēsurabiles cū b numeret d eius quadratū: ergo p vicesimātertiam primi q̄cunq; numerus nūerabit b etiā numerabit d. quare d τ e erunt cōmensurabiles. at tū q2 b et c sunt cōtra se p̄mi d et e esse cōmensurabiles p duodecimā tertij est īpossibile. si aūt b τ c sint incōmensurabiles p scđam hui⁹ b et c sunt cubi. Sit̄ si c et d essent cōmensurabiles p idem qđ prius d et e essent ꝯmensurabiles qđ p duodecimā tertij est īpossibile. Si aūt c τ d sint incōmēsurabiles ergo p scđam hui⁹ vterq; ē cub⁹ quare int̄ b et c erūt duo media ꝯtinue ꝓportiōalia p correlariū quarte hui⁹ at nō mō duo verꝫ etiā̄ quidē incidere mediū vt in p̄ma parte mōstratū est: est īpossibile. cōstat igitur verū esse ꝓpositum.

Dato altera parte longiore: alium ab eo altera parte longiorem inuenire cuius ad illum sit proportio que quadrati ad quadratum. 27



Sit a datus nūerus altera pte longior et eius maius latus sit b: min⁹ vero sit c: sitq; d duplus ad b τ e duplus ad c: τ quadrat⁹ d sit f: et ꝓximus sub eo quadrat⁹ sit g quo nūerus vnitate mior sit h τ pte altera lōgior inter f et g sit l;. q2 eni per secundā partē vicesimequarte huius dr̄ia f et l; est d: et dr̄ia l; ad g est nūerus eo minor vnitate. ideo dr̄ia l; ad h ē equalis d. et cū dr̄ia d et e sit binarius: qm̄ duplū dr̄ie b ad c. nā per correlariū septime scđi duplatoꝝ: duple sunt dr̄ie. τ cū ex d in se fiat f et ex d in binariū qui est dr̄ia eius ad e fiat dr̄ia f ad h: q2 fit dr̄ia f ad l; et l; ad h q̄ est dupla ad d: vt p̄ostēsum est. erit igit̄ h reliquus nūerus q̄ fit ex d in e. duco igit̄ g in h q̄ numeri sola vnitate distare sunt positi: fiatq; l altera pte longior quē dico esse: quē querim⁹. ducat̄ eni b in h et fiat m: τ c in g τ fiat n. eritq; p octauā secūdi ea ꝓportio l ad m q̄ g ad b. et per eandē etiā ea ꝓportio n ad a que g ad b. quare ea est ꝓportio l ad m que n ad a. et q̄a ex b in h fit m: et ex c in g fit n: ideo p nonā quinti erit ꝓportio m ad n ꝯposita ex ꝓportionibus b ad c et h ad g. τ q̄a d in se facit f: et d in e facit h erit ꝓportio f ad h q̄ d ad e. quare τ q̄ b ad c: et q̄a ꝓportio f ad g cōposita est ex ꝓportionibus f ad h equali b ad c et h ad g: ergo ꝓportio m ad n equat̄ ꝓportioni h ad g. et q̄a per correlariū quarte hui⁹ inter f et g est vnus ꝓportionalis medi⁹ erit vnus similit̄ ꝓportionalis medius inter m et n q̄ sit o. cū sit ergo o ad n sicut m ad o et n ad a sicut l ad m. ergo per equā ꝓportionalitatē indirectā erit l ad o sicut o ad a. capio ergo in ꝓportione l ad o tres numeros in cōtinua ꝓportionalitate mīmos q̄ sint r q p: manifestū est r et p esse quadratos: tunc sic q̄ ꝓportio r ad q ea ē l ad o: et q̄ q ad p ea est o ad a: ergo p equā ꝓportiōalitatē que ꝓportio r ad p quadrati ad quadratū ea est l ad a altera parte longioris ad altera parte longiorē: qđ est ꝓpositū.

Si numeri ab vnitate ꝓportionales disponātur tertium ab vnitate quadratū: atq; vno intermisso tertium semper esse quadratū quartū vero ab vnitate cubum τ duob⁹ intermissis quartū semper esse cubum: septimū autem quadratū cubicum atq; quinq; intermissis septimū semper esse quadratum cubicum est necesse 28

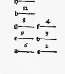


¶ Quadratus cubicus est quadratus q̄ pariter est et cubus. Posita enĩ vnitate ⁊ b c d e f g h k l m n o p vel quotquot voles numeris cõtinue ab vnitate ꝓportionalibus hec statim ex decima ⁊ vndecima huius cognoscit. q2 enĩ vnitas potẽtia et quadrat⁹ est ⁊ cubus. ideo per decima huius c erit quadrat⁹ et ꝑ vndecimã d erit cubus. ⁊ per eandẽ decimã e iterum erit quadratus et iterũ per decimã: q2 e est quadratus g erit quadrat⁹. Sed et q2 d est cubus ꝑ vndecimã g etiã erit cubus q̄ venit vt liq̇do cõstat septimus ab vnitate: quare septimus ab vnitate quadratus ẽ cubicus. et ita cõtinue procede similẽq̧ offendes demonstrandi modum vbiq̧.



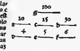
29 ¶ Si numerorũ ab vnitate cõtinue ꝓportionalium secũdus ab vnitate fuerit quadrat⁹ omnes erunt quadrati. q2 si idem fuerit cubus: erunt et omnes cubi.

¶ Prima pars patet. nã per p̄missã etiã terti⁹ erit quadratus. ⁊ q2 secũdus est quadratus ꝑ decimã huius tertius ab illo q̄ est quartus etiam est quadratus. et per p̄missam q2 tertius est quadratus vno intermisso quitus erit quadratus. et ita deinceps quare numerorꝫ ab vnitate cõtinue ꝓportionalium si secũdus est quadratus oẽs erunt quadrati. Scd̓a pars mõstratur. nã si secũdus fuerit cubus: cum quoties vnitas in secũdo toties secũdus in tertio. scd̓us in se q̄ est cubus producet tertiũ: quare ꝑ decimãsextã huius tertius erit cubus. et per p̄missam quartus etiã erit cubus. et per vndecimã huius a quolibet illorũ assumptus quartus erit cubus. at illis cõtinue sumptis oẽs sumentur. constat itaq̧ si secũdus fuerit cubus omnes cubos esse.



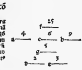
30 ¶ Si proximorũ altera parte longiorꝫ vnus in aliũ ducat: ꝓueniet altera pte longior

¶ Sint a et b duo huiusmodi altera parte lõgiores et medius inter eos quadratus sit c cui⁹ latus sit d q̄d per vicesimã quartã huius erit differẽtia inter a et c ⁊ inter c et b. sitq̧ a minoris altera parte longioris latus alterũ e. eritq̧ d maius e vnitate. ⁊ q2 d in se facit c et d in e facit a erit ꝓportio c ad a tanq̄ d ad e. Sit itẽ vt ex d in f fiat b erit f vnitate maior d. addat itaq̧ e ad a et sit cõpositus g: q2 ex d in e fit a ex f in e fiet g: vt facile ꝑ decimã primi ostẽdatur cũ numerus f numerũ d sola vnitate superet et q2 f in e facit g et d in e facit a: erit per octauã secundi ea ꝓportio g ad a q̄ est f ad d. ideo ⁊ ꝑ septimã eiusdẽ etiã b ad c sicut f ad d: quare ⁊ b ad c sicut g ad a. quare ꝑmutatĩ b ad g sicut c ad a: ergo ꝑ vicesimãquintã secundi q̄d fit ex b in a datis altera parte lõgioribus equale est ei q̄ fit ex g in c at q̄ fit ex g in c est altera pte longior ꝑ diffinitionẽ: cũ g et c sola vnitate differãt. q2 g sit cõpositus ex a et e ⁊ dr̃a a ab ipso quadrato c sit dr̃a qua q̄dem dr̃a d numerus e additus a in cõpositione sola distat vnitate. cõstat igitur numerũ qui ꝓducetur ex b in a esse altera parte longiorẽ. ⁊ propositum.



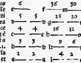
31 ¶ Si primi quiq̧ pte altera lõgiores cũ duplo quadrati inter eos cõstituti ꝯponant ꝓueniet quadrat⁹ cui⁹ radix erit ex minore mĩoris ⁊ maiore maioris laterib⁹ ꝯstituta

¶ Sint enĩ a et b duo quicũq̧ proximi altera pte longiores et eorũ medius quadratus c. sintq̧ d e latera altera pte lõgioris a: ⁊ e f latera alteri⁹ altera pte longioris b. dico q2 si a b cõponãtur cũ duplo c totũ aggregatũ vt g esse quadratũ: cuius radix est cõposita ex d et f. nã per vicesimãquartã huius e est dr̃a a ad c et b ad c: ergo ꝑ secundã primi cõpositum ex a ⁊ b est duplũ ad c. at duplũ c cum a b duplo eiusdẽ erunt eius quadruplũ quod q̄dem positũ est g. quattuor igit̃ in c ꝓducũt g. at quattuor nũerus est quadratus cum producat ex duobus in se ductis ⁊ sil̓r c positus est quadratus. ergo ꝑ decimãquartam p̄sentis et g est quadratus. et cũ g quadratus quadrupl⁹ sit ad c quadratũ: ergo per tertiã huius ꝓportio lat̃is g ad latus c erit dupla. at cũ e sit radix c et d ⁊ f circũpositi eq̄distent ipsi e. ergo ꝑ scd̓az primi d et f simul sunt duplũ e lateris c: quare radix quadrati g est ꝯposita ex d et f: q̄d est ꝓpositũ.



32 ¶ Si duo quilibet proximi quadrati cũ duplo medij inter eos altera pte longioris cõiungãtur: cõpositus erit quadratus latusq̧ ipsius ex laterib⁹ ipsorꝫ compositũ.

¶ Sint a b duo quilibet proximi quadrati et c medius inter eos altera parte lõgior et d e eorꝫ latera dico quadratos a b cũ duplo c efficere quadratũ vt f cui⁹ latus erit cõpositum ex d e. Nam ꝑ vicesimã quartã huius ex d in e fiet c altera parte lõgior inter a et b: quare per nonã primi erunt a et c tanq̄ q̄d fit ex d in ꝯpositũ ex d e: quod q̄dem cõpositum sit g et per eandẽ c cũ b tanq̄ quod fit et e in ꝯpositum d e id est in g. et ꝑ eandẽ nonã q̄d ex d et e in g tanq̄ quod fit ex g in se. erit igit̃ quadratũ numeri g tñ ꝯtum a ⁊ c ⁊ c b: ergo ꝯtum a et b ⁊ c bis. fuit enĩ c bis scꝫ semel cũ a et semel cum b sumptũ: sed illud quod fiebat ex a et b ⁊ c bis positũ est esse f. est igitur f quadratus cuius latus est g. et q2 a g est ꝯposit⁹ vt positum est ex d et e lateribus quadratorũ a et b: constat totum propositum.



33 ¶ Si ad duos vsq̧ nũeros vnitate distãtes: oẽs numeri ab vnitate coaceruẽtur: q̄ ex coaceruatione proueniet erit nũerus quadratus latusq̧ ipsius coaceruatorꝫ maxim⁹.

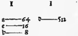
¶ Sint nũeri ab vnitate dispositi ꝑ duos ordĩes vsq̧ ad e ⁊ d duos q̄dẽ nũeros vnitate distãtes p̄mus hoc mõ vnitas a b c d e: ⁊ scd̓us hoc mõ vnitas a b c d: ⁊ sit quadrat⁹ e numerus f. dico quadratũ f esse tanq̄ oẽs numeri illorũ duorꝫ ordinũ coaceruati Signo enĩ oẽs quadratos ĩferiores f q̄ sint dispositi ꝑ ordinẽ f g h k l vnitas. eritq̧ g quadrat⁹ d: et h quadrat⁹ c: ⁊ k quadratus b: et l quadrat⁹ a. ⁊ postea vnitas q̄ est p̄me vnitatis quadrat⁹. Intelligo sil̓r m n o p q medios altera pte lõgiores. et q2 per vicesimãquartã huius dr̃a f ad m est e: ⁊ dr̃a m ad g est d. ergo ꝑ octauã conceptionẽ dr̃a extremorꝫ f g ẽ e d. et sil̓i argumẽto dr̃a g ad h est d c. et dr̃a h ad k est c b: ⁊ dr̃a k ad l est b a: et dr̃a l ad vnitatẽ est a et vnitas. addita ergo vnitate ad a et vnitatẽ: fiet l. et addita b a dr̃a scꝫ k ad l. ad a ⁊ duplã vnitatẽ. i. ad l: fiet k. addita insup c b dr̃a k ad h ad b a ⁊ a et duplã vnitatẽ. i. ad k: fiet h: ⁊ simil̃r addito d c dr̃a h ad g ad c b: b a: a et duas vnitates: hoc est ad h: fiet g. et addita e d dr̃a g ad f ad d c: c b. b a: a et duas vnitates fiet f. per nonam igitur conceptionẽ constat ꝓpositum demonstratum.

Quicunq; ex numeris ab vnitate bis sumptis coacervatur: est parte altera longior minusq; laterum ipsius: coacervatorū maximus 34



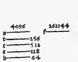
Sint huiusmodi nūeri bino ordine sumpti vnitas a b c d q simul aggregētur fiatq; m: quē dico eē altera pte longiorē: eiusq; minus latus eē d. nā per pcedentē si pdictis nūeris addo e fiet quadratus f: cuius oīa a medio altera pte lōgiore est e. remoto igit numero e a quadrato f remanet altera pte longior medi⁹ int f et proximū minorē quadratū. Sed q remanet āmoto e est aggregat⁹ duorū assignatorū ordinū scz m: igit m est altera pte longior medi⁹ inter f et proximū minorē quadratū. Sed ille medi⁹ altera pte lōgior ut ex d in e illorū quadratorū laterib⁹ per vicesimāquartā pñtis d aūt minus est: ergo altera pte lōgioris m min⁹ latus ē d. et d ordinū assignatorū maxim⁹ ē nūerus. pstat ḡ tota ppō firma

Si fuerit nūerus q̄dratus cubic⁹: latus quidē q̄drati erit cub⁹ latus vero cubi q̄drat⁹ 35



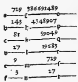
Sit a nūerus quadrat⁹ cobicus cui⁹ quatenus quadrati latus sit b: quatenus vero cubi latus sit c: dico b esse cubū et c esse quadratū. Primū pz. duco eñi b in a et fiat d ppalā est d esse cubū et a cubus ipm numerat fm b: ergo p correlariū decimeseptime huius b est cubus qd est primū. Scdm ostēditur sit e quadratū c: q: qd sub c et e extremis cōtinetur equū est ei qd fit ex b in se. ergo p vicesimāsextam secundi e b c sunt continue proportionales sed e primus est positus quadratus: igitur et c per decimā huius est quadratus: sicq; totum constat propositum.

Si fuerint duo numeri quadrati cubici: medius inter illos in continua proportionalitate erit cubus: duorum vero mediorū vterq; quadratus. 36



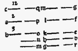
Sint a et b duo quadrati cubici: q: a et b sunt quadrati p correlariū quarte huius ē inter eos vnus medius pportionalis q sit c. et q: a et b sunt cubi p idem correlariū inter eosdē sunt duo medij pportionales q sint d et e. dico ergo c esse cubū et d et e esse quadratos. c aūt esse cobū declarat. nam duco a in b et pueniat f: q: a et b sunt cubi: f etiā per decimāsextam huius erit cubus et cū a c et b sint proportionales: ergo p vicesimāsextam secūdi f cubus fiet ex c in se. quare f est quadratus ipsius c. est igitur f quadrat⁹ cubicus: quare c latus f vt quadrati per pcedentē est cubus qd est primū. sed d et e esse quadratos hinc liquet: q: b e d sunt cōtinue proportionales et b primus est quadratus. igitur et tertius d per decimā huius. Item a d et e sunt numeri pportionales et a primus est quadratus igit per eandē decimā et e tertius quadratus. Est igitur tota propositio nota.

Duos q̄dratos cubicos iuenire: int quos nūeri quotlibet medij pportiōalr sumāt 37



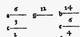
Si duos q̄dratos cubicos iubeor iuenire inter quos quotlibet infiaceāt medij pportionales sumo nūeros pportionales plēs duobus: ipsis medijs: quos iubeor iuenire. verbi cā si iubeor iuenire duos quadratos cobicos int quos sint quattuor medij pportionales sumo sex nūeros cōtinue pportiōales vt a b c d e f: quorū per ordinē sumātur cubi g h k l m n: q per sextā huius sunt etiā pportionales quis quidē cubi in se per ordinē ducātur et proueniāt o p q r s t. dico itaq; o et t esse duos tales quadratos cubicos. nā cum g h et ceteri in se ducātur o p q et ceteri sunt quadrati: et q: g h et ceteri eorū scz latera sunt pportiōales: per quintā huius o p q et ceteri eorū quadrati sunt pportionales. at cum g et n sint cubi ergo per decimāsextā huius o et t erunt cubi. sunt igitur o et t quadrati cubici inter quos quattuor numeri p q r s sunt medij proportionales: qd est propositū.

Duos q̄dratos cubicos reperire: int q̄s medios fm datos nūeros sumē sit possibile 38



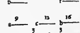
Sint dati nūeri a et b: ppositūq; sit duos quadratos cubicos iuenire: inter quos sint numeri pportionales fm a et etiā fm b: sitq; a binarius et b ternari⁹. q: a eni pportiones semp sunt vno plures ipsis medijs et a est binarius: iō vt medij inueniātur fm a oportet tres esse pportiones. et q: a b est ternari⁹ vt inueniātur medij scdm b opz quattuor esse pportiones. Duco ergo tria in quattuor et proueniat c et scdm c ordino cōtinue pportiōes in nūeris r d e f g h k l m n o p q: quorū q et r p pcedentē ponantur quadrati cubici: et piūgo quattuor ex illis pportiōib⁹ vt hic scdm quaternos et q̄ternos ordies: et hēbo tres medios pportiōales scz n k f p equā pportiōalitatē. et silr piungo tres ex illis vt hic p quinos et q̄nos ordines et hēbo m et g duos medios pportiōales int q et r quadratos cubicos: qd est ppositū

Int q̄slibet duos supficiales siles: tertiū in ptinua pportiōalitate mediū eē necē est 39



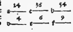
Sint a et b nūeri supficiales siles: et latera a sint c et d: et latera b sint e et f. dico int a et b eē vnū numerū in cōtinua pportionalitate. nā q: a a et b sunt siles p diffinitionē eius latera sunt pportionalia. ideo q̄ pportio c ad d: ea est e ad f. quare pmutati q̄ pportio c ad e: ea est d ad f. duco ergo e in d et fiat g: et q: a c in d facit a: et b in eundē d facit g: ergo p octauā scdi pportio a ad g vt c ad e. et q: a iterū e in d facit g et e in f facit b: ergo pportio g ad b vt d ad f. sed pbata est pportio c ad e vt d ad f: ergo proportio a ad g vt g ad b. est igitur inter a et b nūerus g medius pportionalis: qd erat demōstrandum

Q: si tertius int eos medi⁹ pportiōalr ceciderit: duo q̄libet nūeri erūt supficiales siles 40



Hec est cōuersa pcedētis. Sint eni a et b q̄cunq; duo nūeri inter quos sit c medi⁹ pportiōalis: dico a et b supficiales eē et siles. capio eni d e minimos in pportione a ad c q̄ q: minimi per decimānonā tertij numerabūt a et c equalr: sitq; id scdm f et silr nūerabūt c et b equalr: sitq; id scdm g manifestū itaq; est cū a sub duobus lateribus d et f: et b sub duobus e g cōtineat: a et b p diffinitionē esse supficiales. Sed q sint similes pz. nā q: per hypothesim d et e numerāt c et b secundū g: d numerat c scdm g: et e numerat c secundū f vt et positū est. igitur per vicesimāquintā secundi d f et e g sunt proportionales: sz d f sunt latera a: et e g sunt latera b. sunt igit a et b per diffinitionē supficiales siles: qd est ppositū.

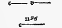
41 ¶ Si fuerit duo nūeri sup̄ficiales sil'es: erit ꝓportio vni⁹ ad alterū tāq̄ q̄drati ad q̄dratū
¶ Sint a et b duo sup̄ficiales similes: dico ꝓportionē a ad b esse q̄ quadrati ad quadratū. nam ꝑ ante pmissam erit inter eos vnus medius ꝓportionalis q̄ sit c. Sumo ergo tres minimos in eorū ꝓportiōe q̄ sint d e f ꝑ primā huius d et f erūt quadrati. et cum q̄ ꝓportio d ad e ea sit a ad c. et q̄ e ad f ea sit c ad b ergo ꝑ equā ꝓportionalitatē q̄ ꝓportio d ad f quadrati ad quadratū ea est a ad b: qđ est propositū.



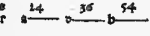
42 ¶ Si duorum numerorum proportio fuerit que quadrati ad quadratum illos superficiales similes esse necesse est.
¶ Hec est cōuersa precedentis. Sint a et b quadrati et sit ꝓportio c ad d q̄ a ad b: dico c d numeros esse sup̄ficiales sil'es. Nam ꝑ cōtrariū quarte hui⁹ est vnus medi⁹ ꝓportiōalis inf a et b. q̄re et ꝑ duodecimā quarti vn⁹ erit medi⁹ ꝓportiōalis inf c et d. q̄re ꝑ 40 hui⁹ c et d sunt sup̄ficiales sil'es: qđ ē ꝓpositū



43 ¶ Si duorū superficialiū similiū alter in alterū ducaf: quadratus numerus producef.
¶ Sint a et b sup̄ficiales similes: ducaturq̄ a in b et ꝓueniat c: dico c esse quadratū. Nam ꝑ tricesimā nonā huius inter a et b est vnus medius ꝓportionalis q̄ sit d. q̄a ergo a d b sunt cōtinue ꝓportiōales per vicesimāsextam secundi idem est qui fit ex a in b et ex d in se. at qđ ex d in se fit est quadratū: igitur et c quod fit ex a in b: quod est propositum.



44 ¶ Si ex ductu duorum numerorum vnius in alterum producatur quadratus: illos duos superficiales similes esse conuenit.
¶ Hec conuertit precedentē. vt si ex a in b producatur c quadratus: dico a et b esse sup̄ficiales similes. Nam per vicesimāsextam secundi latus tetragonicum c erit medius proportionalis inter a et b. ergo per quadragesimā huius a et b sunt superficiales similes: quod intenditur.

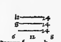


45 ¶ Si duo numeri superficiales vni fuerint similes: erunt et inter se similes.
¶ Sint a b duo numeri sup̄ficiales similes c: dico a et b esse inter se similes. Nam q̄a a ē similis c inf a et c est vnus medius proportiōalis qui sit d. et q̄a b etiam similis c inter b et c similiter vnus medius proportionalis qui sit e. igitur per decimāsextam quarti et inter a et b erit vnus medius ꝓportionalis quare per quadragesimā huius a et b erunt superficiales similes: et propositum.

46 ¶ Si aliquis numerus in superficialem ducatur: proueniens erit solidus.
¶ Nam superficialis fit ex ductu numeri in numerū facta vna multiplicatione. qui igitur ex ductu alicuius in ipsum producetur tribus lateribus cōtinebatur cōtinua facta multiplicatione. quare per diffinitionē erit solidus: quod intendebatur.

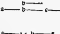
47 ¶ Omnis solidus ab aliquo superficiali numeratur.
¶ Nam oīs solidus per diffinitionē habet tria latera quorū tertium ducif in productū ex reliquis. at talis ꝓductus est supercialis. numeraf igitur oīs solidus ab aliquo sup̄ficiali vt proponebaf.

48 ¶ Datis trib⁹ nūeris cū triplici mō solid⁹ ꝑcreef: vnus tñ idēq̄ erit q̄ ex oīb⁹ ꝓducef
¶ Sint tria latera a b c: et primo ex a in b fiat d: et ex c in d fiat solidus e. scđo ex b in c fiat f et ex a in f fiat solidus g. tertio ex a in c fiat h et ex b in h fiat solidus k. dico tres solidos e g k ex tribus laterib⁹ triplici mō creatos eosdē esse atq̄ equales. Nā q: a in b facit d: et c in b facit f. ergo ꝑ octauā secundi d ad f vt a ad c. ergo ꝑ vicesimāquintā secūdi idē est q̄ fit ex a i f et c in d: sed a in f facit g et c in d facit e sunt igif e g solidi equales. Itē q: ex b in c fit f et ex a in c fit h: ergo ꝑ eandē octauā que ꝓportio b ad a ea est f ad h. ergo ꝑ vicesimāquintā secundi iterū idem fiet ex a in f et b in h. sed ex a in f fit solidus g: et ex b in h fit solidus k. sunt igif solidi e et k adinuicē equales: sed et solid⁹ e posit⁹ est equalis solido g ꝑ cōem sciam k et e sunt solidi eq̄les. sunt igif vt ꝓponebaf tres solidi e g k adinuicē eq̄les: et ꝓpositū



49 ¶ Omnis numerus a tribus numeris numeratus solidus esse probatur.
¶ Sint a b c tres nūeri numerātes d: dico d esse numerū solidū. nā vel a est p̄mus vel ꝯposit⁹. si ꝯposit⁹ ergo ꝑ quadragesimāsextā huius q̄cunq̄ nūerus in ipm ducaf ꝓducet solidū: sicq̄ cōstabit propositū. Si aūt sit prim⁹ q: b nūerat d fm aliquē numerū: ergo ꝑ quartā tertij a numerat b: vel alterū fm quē nūerat. quare b aut is fm quē nūerat est sup̄ficialis. erit itaq̄ ꝑ quadragesimāsextā: vt prius d solid⁹.

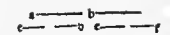
50 ¶ Oim duorū solidorū ꝓportio: ē ex laterū vni⁹ ad latera alteri⁹ ꝓducta ꝓportiōib⁹.
¶ Sint a et b duo solidi: sintq̄ c d e latera a: et f g h latera b. dico proportionē a ad b esse cōpositā ex ꝓportionibus c ad f: d ad g: et e ad h. duco enī c in d et ꝓueniat k et f in g et proueniat l. ꝑ nonā igitur quinti proportio k ad l cōposita est ex proportionibus c ad f et d ad g. et q: per quadragesimāoctauā huius si e ducatur in k et h in l prouenient a et b. ergo per nonā quinti proportio a ad b vt k ad l et e ad h: sed proportio k ad l monstrata est cōposita ex c ad f et d ad g. ergo proportio a ad b composita est ex proportionibus c ad f: d ad g: et e ad h: quod est propositum.



51 ¶ Si duo solidi sil'es alios duos equalif numerēt: illos quoq̄ solidos sil'es eē necē ē.
¶ Sint a b duo solidi similes numerētq̄ d e equaliter vt secundū c. dico d e pariter eē solidos similes assigno enim f g h latera a: et k l m latera b. ducoq̄ f in g et ꝓueniat n et k in l et ꝓueniat o. et q: h in n ꝑ quadragesimāoctauā huius facit a: et m in o facit b. est itaq̄ n in a fm h: et a in d fm c. ergo ꝑ vicesimātertiā primi n est in d secundū productū ex c in h q̄ sit p. et similiter q: o est in b fm m et b in e fm c: per eandē vicesimātertiā o est in e fm productū ex c in m q̄ sit q. et q: c in h facit p et c in m facit q. ergo que ꝓportio h ad m ꝑ septimā secundi ea est p ad q: quare et q̄ f ad k et g ad l. sed p in n facit d et q in o facit e vt monstratū est. Sed tñ est f in g q̄tum n: et k in l q̄tum o. ergo p f g in se facient d: et q k l in se

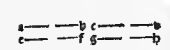


faciēt e. sunt ergo d ⁊ e solidi et latera d sunt p f g ⁊ latera e sunt q k l. sed illa probata sunt ꝓportionalia: ergo d et e sunt etiā similes: quod est totum propositū monstratū.



¶ Inter quoslibet duos solidos similes: duo numeri in cōtinua proportionalitate medij intercidunt. 52

¶ Nam ꝑ penultimā ꝓpositionē erit ꝓportio vnius illoꝝ solidorū ad reliquū tanq̄ lateris ipsius ad latus alterius ꝓportio triplicata. Sumam ergo quattuor nūeros in ꝓportione lateris ad latus. ⁊ q: pmi ad quartū erit ꝓportio lateris ad latus triplicata: illa erit eadē ꝓportioni solidi ad solidū. ergo per duodecimā quarti quot media sunt inter primū ⁊ vltimum tot erunt inter solidum et solidum. at media sunt duo: ergo inter solidum ⁊ solidū itidē erunt duo: quod est propositū



¶ Si fuerint quattuor numeri cōtinue proportionales: duo extremi erunt solidi siles. 53

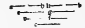
¶ Hec est cōuersa precedētis. Sint a b c d quattuor numeri cōtinue ꝓportionales: dico a et d esse solidos similes. Sumo enī e f g h quattuor illius ꝓportionis mīmos q̄ si cū assignatis iidē fuerint cum ꝑ scdam hui⁹ e ⁊ h sint cubi siłr a et d erūt cubi. quare solidi similes sicq̄ firmū stabit ꝓpositū. Porro si iidem nō sint cū e ⁊ h per quintā quarti sint contra se primi: quare per vicesimā tertij in sua ꝓportiōe mīmi et ꝑ decimānonā eiusdē equaliter numerabūt a et d. sed e ⁊ h cum ꝑ secundā huius sint cubi ipi sunt solidi similes. ergo iterū per quīquagesimāprimā huius a et d sunt solidi siles: qđ est propositū.

¶ Omniū duorū solidoꝝ similiū: est ꝓportio vnius ad alterū tanq̄ cubi ad cubum. 54

¶ Sint a et d solidi siles: dico ꝓportionē a ad d esse proportionē tanq̄ cubi ad cubū. q: ꝑ quinquagesimāsecundā huius inter a ⁊ d sunt duo medij ꝓportionales. sint ergo illi b c: capio vt prius e f g h in illa ꝓportione mīmos quoꝝ ꝑ scdam hui⁹ cū stat e ⁊ h esse cubos q̄ si iidē sint cū pdictis ꝯstat ꝓpositū si nō idēdē: q: ꝑ equā ꝓportiōalitatē q̄ ꝓportio e ad h cubi ad cubū eadē ē a ad d: qđ iterū ē ꝓpositū

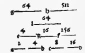
¶ Q: si vnius ad alterum fuerit proportio tanq̄ cubi ad cubum: quoslibet duos numeros solidos similes esse necesse est. 55

¶ Hec est cōuersa pcedētis q̄ ideo vera esse cōuincit: q: ꝑ correlariū quarte hui⁹ int̄ quoslibet cubos duo inreperiātur medij ꝓportionales. igr̄ ꝑ duodecimā quarti et int̄ illos solidos itidē duo infiacebūt medij ꝓportiōales. ergo ꝑ 53 hui⁹ duo extremi q̄ erūt solidi assignati erūt solidi siles: qđ est ꝓpositū



¶ Si fuerint duo solidi vni solido similes: ipsi quoq̄ inter se erunt similes. 56

¶ Sint a b duo solidi similes solido c: dico a et b esse solidos inter se similes. Nā q: a c sunt solidi int̄ se similes: ergo per quīquagesimāsecundā huius inter a ⁊ c sunt duo medij ꝓportionales q̄ sint d e. et similiter per eandē inter b et c q̄ sint f g. igitur ꝑ decimāseptimā quarti duo similit̄ erunt inter a ⁊ b. quare a ⁊ b per quinquagesimātertiam huius inter se sunt solidi similes: qđ erat demōstrandū.



¶ Si fuerint quattuor numeri proportionales et duorum extremorum quilibet in quadratum alterius ducatur: prouenient cubi aliorum. 57

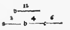
¶ Sint a b c d quattuor numeri cōtinue ꝓportionales: sitq̄ e quadratū a et f quadratū d ducaturq̄ d in e ⁊ ꝓueniat g et a in f ⁊ ꝓueniat h. dico igitur g et h esse cubos b ⁊ c. duco enī b in se ⁊ fiat k: q: e ⁊ k sunt quadrati quoꝝ latera sunt a b erit per tertiā hui⁹ ꝓportio e ad k tanq̄ ꝓportio a ad b duplicata: quare tanq̄ b ad d: ergo per vicesimāquintam secundi idem est qui fit ex b in k et e in d. sed qui fit ex b in k est cubus b. qui autē ex e in d est g: igitur g est cubus b. similiter si ducatur c in se ⁊ fiat l erit per eandē tertiā huius ꝓportio l ad f tanq̄ a ad b duplicata. quare tanq̄ a ad c: quare per vicesimāquintā secundi vt prius idem erit qui fit ex c in l et a in f: qui autē fit ex c in l est cubus c: ⁊ qui fit ex a in f est h igitur h est cubus c: quod est propositum.

¶ Datis lateribus siue laterū ꝓportionibus: solidoꝝ summā hitudinēq̄ inuestigare. 58

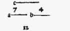
¶ Hec in solidis cōtinuis eq̄ et discretis eandē hꝫ veritatis certitudinē. si primo dētur latera duc quōcunq̄ illa in seinuicē tria scꝫ vni⁹ et tria alterius et ꝓuenient statim ꝑ quadragesimāoctauā huius solidorū sūme. si autē laterū ꝓportiones dētur cōpone per tertiā quinti laterū ꝓportiones: siue cas per sextā quinti continua et ꝓportio ex laterū ꝓportionibus cōposita per quinquagesimā huius aut q̄ ex cōtinuatis cōponetur: erit ꝓportio solidi ad solidū sicq̄ nota erit solidoꝝ habitudo atq̄ totum quod ꝓpositio proponit notum. Sexti elementoꝝ arithmetices Jordani finis.

p Ar numerus est qui in duo equalia diuidi potest. Impar est in quo aliqua prima pars est absq̄ pari: additq̄ supra parem vnitatē. Parium numerorū alius pariter par: alius pariter ipar: et alius impariter par. Pariter par est quē nullus impar numerat. Pariter ipar est quē quicunq̄ pares numerāt: cum scdm iparē numerāt. Impariť par est quē quidā par ꝺm parē ⁊ quidā ꝺm imparē numerāt Medius inter duos numerus dicitur: qui inter eos positus equalit̄ ab vtroq̄ distat. Medij dicūtur duo numeri qui nō habētes aliquē interpositū: equales habent ad extremos differētias. Perfectus numerus appellatur qui ex omnibus suis partibus cōiunctis perficitur. Abundans dicitur: ad quem omnes sue partes cōparate: maius habere reperiūtur. Diminut⁹ vero cuius partes cōiuncte oēs minus ipso constituūt.

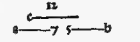
1 ¶ Si quotlibet sibi coacervẽtur pares: qui proveniet erit par.
¶ Nam ex diffinitiõe paris quotquot assignabãtur eorũ quilibet h3 medietatẽ. at oẽs eorũ medietates per sextã primi adinvicẽ coniũcte: coacervati dimidiũ cõstituũt. coacervatus igitur cum in duo equa dividi possit erit par: quod intendebatur.



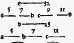
2 ¶ Si par et impar coniungantur: compositus erit impar.
¶ Nam si ab impari auferatur unitas cũ solam unitatẽ per diffinitionẽ super parẽ addat: relinquitur par. qui si addatur alteri pari: per p̃cedentẽ compositus erit par. cui quidẽ si ablata restituat̃ unitas: totus per diffinitionẽ fiet impar. at ille erit q̃ ex pari ⁊ ĩpari cõflat. ratũ est ergo qđ propõ intẽdebat.



3 ¶ Si impar impari addatur: proveniet numerus par.
¶ Nam si ab utroq3 eorum demãtur unitas relinquẽtur duo pares qui per ãtepremissam cõstituent numerũ parem: cui quibẽ composito si iungãtur due ablate unitates que parẽ constituunt per eandẽ antepremissam totus rursum evadet par. hoc autẽ intendebat propositio.

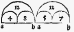


4 ¶ Si impares numero pares sibi coacervẽtur: totus ex eis cõflatus erit par.
¶ Nã cũ nũerus quo eos sumim⁹ sit par: in eo binari⁹ aliquotiens sumet̃ q̃ totiens per p̃cedentẽ binario copulati erũt pares. igit̃ per primã hu⁹ adinvicẽ simul additi ꝯstituunt numerũ parẽ: qđ est ꝓpositũ.



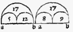
5 ¶ Si impares numero impares coacerventur: cõpositus erit impar.
¶ Nam si unus eorũ omittatur per precedentẽ compositus erit par: ergo per secundã p̃tis si ꝯposito addatur omissus ĩpar: totus q̃ inde nascitur ex oĩbus compositus erit impar qđ est propositũ.

6 ¶ Si a pari detrahatur par: relinquetur par.
¶ Nam si relinq̃retur impar: idem cum detracto additus per secundã presentis cõstituisset imparẽ: quod est contra hypothesim. verum igitur est propositum.



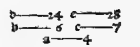
7 ¶ Si impar a pari tollatur: residuus erit impar.
¶ Nam si residuus poneretur par: idem detracto appositus per secundã huius cõstituisset imparẽ: quod est contra hypothesim. erit igitur verum propositũ.

8 ¶ Si ab impari impar tollatur: remanebit par.
¶ Nam si remaneret impar: idem ablato additus per tertiã huius cõstituisset parem: at positus est impar. relinquitur igitur par: quod est propositum.

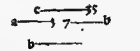


9 ¶ Si par impari substrahatur: reliquus erit impar.
¶ Nam si residuus esset par: substracto additus per primã huius cõstituisset parẽ: quod est contra positum. relinquitur igitur propositum verum.

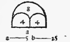
10 ¶ Omnis numerus per parem multiplicatus: parem producit.
¶ Nã si multiplicat parẽ per diffinitionẽ totiens multiplicat⁹ erit in ꝓducto quotiens unitas in multiplicãte. ⁊ cũ multiplicat⁹ sit par tot illi pares simul additi per primã hu⁹ ꝯstituũt ꝓductũ parẽ. si aũt multiplicet ĩparẽ per idẽ totiens erit multiplicat⁹ ĩpar in ꝓducto quotiens unitas in multiplicãte. at unitas in eo ponit̃ esse in numero pari: ergo per quartã huius illi impares numero pares simul additi ꝯstituunt iterũ parem: quod est totum propositum.



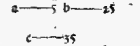
11 ¶ Si impar in imparem ducatur: qui producetur erit impar.
¶ Nam multiplicatus impar per diffinitionẽ totiens erit in producto quotiens unitas in multiplicãte impari. at in illo unitas est in numero impari. igitur per quintã huius illi impares et numero quidẽ impares simul additi cõstituent productũ imparem: quod est propositum.



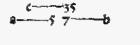
12 ¶ Quemcunq3 par numerat: eum esse parem necesse est.
¶ Nam par numerãs per diffinitionẽ põt in duo equa dividi in cuius medietates si numer⁹ secundũ quẽ numerat ducat̃: per nonã primi eundẽ productũ ꝓducit. at idẽ numer⁹ in alterã medietatũ duct⁹ ꝓducit ꝓducti dimidiũ. igit̃ ꝓductus ut q̃ põt in duo equa ptiri per diffinitionẽ est par: qđ est ꝓpositũ.



13 ¶ Quicunq3 imparem numerat: impar est
¶ Nam si ponas q᷑ q̃ eum numerat sit par: per precedentẽ numeratus erit par: quod est contra hypothesim. qui igitur eũ numerabit si quis numeret: erit impar: quod est propositum.



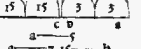
14 ¶ Si impar imparem numeret: secundum imparem eum numerabit.
¶ Nam si impar numeraret imparẽ secundũ parem: ergo alternatim per octavã primi par numeraret eundẽ secundũ imparẽ: quod per duodecimã huius est ĩpossibile. verum igitur propositũ.



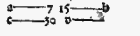
15 ¶ Si impar parem numeret: secundũ parem eum numerare conveniet.
¶ Nam si impar secundũ imparẽ eum numeraret: ergo per undecimam huius totus esset impar. at positus est par. accideret itaq3 contra hypothesim. relinquetur igitur propositum.



16 ¶ Si parem impar numeret: dimidium quoq3 ipsius numerabit.
¶ Nam si impar parem numeret: per premissam secundũ parem eũ numerabit. cum itaq3 omnis par medietatẽ habeat impar ergo ille per illius medietatẽ multiplicatus per octavam et nonam primi producet totius medietatẽ. numerabit igitur impar ille: numerati dimidiũ: quod est ꝓpositum



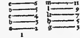
17 ¶ Si nũerus ĩpar ad aliquẽ numerũ fuerit prim⁹: idẽ quoq3 ⁊ ad eius duplũ erit p̃m⁹
¶ Ut si ĩpar a sit primus ad b dico ipm esse primũ ad c duplũ b. nã si nõ fuerit primus ad c ergo a ⁊ c cõicabunt. erit igitur per diffinitionẽ numerus cõiter numeros a et c numerãs: qui sit d. ⁊ q̃ d a d nũerat a ⁊ c: et c est par q2 duplus b. et ideo q̃ põt in duo equa partiri: igitur per precedentẽ d etiã numerabit dimidiũ c. quare a ⁊ b cõicabunt: quod est contra hypothesim. erit igit̃ a primus ad c: qđ est ꝓpositũ.





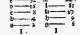
¶ Si dispositorum ab unitate numerorū secundū naturalem seriem: omniū dupli sumantur: proueniēt omnes pares ab unitate: eruntq; parium eodē ordine sumpte que et numerorum ab unitate dispositorū proportiones. 18

¶ Dispono numeros ab unitate secundū naturalē seriem unitas a b c d e f: quorū per ordinē sumo duplos g h k l m n o. dico primo oēs pares ab unitate usq; o esse acceptos. secūdo q̄ proportiones sunt numerorū ab unitate dispositorū: ut a ad unitatē: b ad a: c ad b: d ad c: e ad d et f ad e: tales esse per ordinē in ordine pariū: ut h ad g et k ad h et l ad k et ita ceterorū. Primū patet. nam primo duplos esse pares manifestū est cum quilibet eorum in duo dimidia que equa sunt diuidi possit. Et q̄ nullus alius ab acceptis sit par certū est q̄ talis nō haberet mediū in numeris: q̄ si haberet ullū coincideret cū aliquo assignatorū. certū est ergo oēs pares fuisse acceptos. Secundū patet. nā que proportio a ad h: ea est unitatis ad g. ergo pmutati per tertiā secūdi q̄ proportio a ad unitatē: ea est h ad g. Itē que b ad k: ea est a ad h. ergo p eandē q̄ b ad a: ea est k ad h. et ita p eandē consilr procede et totū firmū ↄcludes propositū.



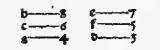
¶ Si numerorū ab unitate naturali serie dispositorū: duo et duo continue cōiungātur fient oēs ipares ab unitate. ipsorūq; impariū proximi quiq; erunt contra se primi. 19

¶ Disponatur ordo numerorū ab unitate sm eorum naturalē seriem: cōiungāturq; quiq; duo et duo proximi. dico primo omnes ab unitate fieri ipares. scdo vero quosq; duos proximos esse contra se primos. Primū patet. nā quicunq; duo proximi in naturali serie numerorū p diffinitionē solū unitate distāt: q̄re eorū alter est par et alius ipar. ipsi igitur simul additi p secundā huius totū constituūt imparē. Sed q̄ nullus sit impar preter illos sic cōstat alioquin nō posset ille impar diuidi in pximas partes quarū una super alterā addit unitatē quod est contra diffinitionē. aut si diuidatur cōstituetur ex duobus numeris in naturali serie numerorū proximis qd̄ est propositum. Secundū patet. nā cum oīs impar ab unitate addita unitate et unitate substracta habeat circūpositos pares: et oīs par circūpositos impares ab eo solis unitate distātes per cōceptionē igitur drīa quorūcunq; proximorū impariū est binarius. at binarius est numerus primus cū a nullo alio nūero preter unitatē numeretur. additus igitur binarius q̄ est numerus primus unitati cōstituet primū imparē numerū primum: q̄quidem binarius numerus primus additus ternario numero etiā primo: per primā tertij cōstituet numerū ad alterum primū. Itidē et per nonā tertij argumētaberis: et ita de quibuslibet duobus proximis ostendere pfacile est: qd̄ est propositū.



¶ Si numerorū ab unitate proportionaliū secundus ab unitate fuerit par reliquos oēs pares esse: q̄ si idem fuerit impar: reliquos itidem ipares esse necesse est. 20

¶ Nā si secūdus est par q̄a numeratur ab unitate scd̄us nūerabit tertiū et tertius quartū: sicq; deinceps quare p vicesimātertiā primi scd̄us q̄ est par nūerabit oēs reliquos. sunt igitur reliq̄ oēs p duodecimā huius pares qd̄ est propositū quo ad hoc. et si scd̄us est ipar q̄a nūeratur ab unitate: id ipse in se ductus nūerabit tertiū et per vicesimāquintā scdi tertius sm eundē quartū et ita deinceps. igitur per undecimā huius eorum quilibet erit impar: quod est totum propositū.



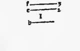
¶ Inter quoslibet duos numeros quorū uterq; par est aut uterq; impar: unus est medius q̄ si unus fuerit medius utrūq; parē aut imparē esse necesse est. 21

¶ Nā si uterq; fuerit par: ipsi simul additi p primā huius cōstituunt numerū parem. et si uterq; fuerit impar p tertiā huius idē eueniet. si itaq; illius sumatur medietas p scd̄am partē secunde primi illa erit nūerus a quo illi numeri equidistabūt p diffinitionē. igitur numerus ille erit inter illos medius. Scd̄m patet nā si inter eos sit medius p primā partē scd̄e primi idē duplicatus est tantū illi ↄiūcti q̄ cū sit par eo q̄ est duplus si alter eorū sit par p sextā huius et reliquus. et si alter eorū sit ipar p septimā eiusdē et reliquus quod est propositum.



¶ Inter parem et imparem vel nullus est medius vel duo: q̄ si duo fuerint inter eos medij: alterum parem et alterum imparem esse cōuincitur. 22

¶ Si unitate distiterit par atq; ipar: inter eos nullus incidet medius. q̄ si āplius q̄cunq; distiterint ut par a et ipar b: dico inter a et b eē duos medios. nā p secundā huius a et b iūcti ↄstituūt numerū iparē ut c. q̄ per nonā eiusdē diuidi poterit in duos unitate distātes q̄ sint d e: quos dico p tertiā primi equidistare a et b. quare per diffinitionē sunt medij qd̄ est primū. Scd̄o dico q̄ si inter a et b sint duo medij alterū esse parē et alterū imparē. nā si duo ut d e interiacēt medij: p diffinitionē unitate distabūt. quare eorū alter erit par et alter impar. cōiuncti igitur d e p scd̄am huius constituent imparē. at a b coniuncti per tertiā primi cōstituunt eandē. quare si alter fuerit par per nonam huius reliquus erit impar. et si alter fuerit impar per octauā huius reliquus erit par: quod est propositū.

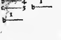


¶ Inter quēlibet imparē et unitatem unus est medius: idēq; est maior ipsius portio. q̄ si inter unitatē et ipm unus medius extiterit: quēlibet talē numerū imparē esse ↄuenict. 23

¶ Sit a quilibet impar et b unitas: dico inter a et b esse unum mediū qui est maior portio a. dico etiā q̄ si inter a et b unus sit medius numerū a esse imparē. Primū patet. nā cum a numerus ipar superet b unitatē in numero pari ut in c q̄ est differētia a ad b. et q̄ c est par diuidatur in duo equa d atq; e. capio ergo numerū f cuius e sit differētia ad b: quē dico esse mediū inter a et b. nā q̄a per conceptionē differentia a ad b cōstituta est ex differētiis a ad f et f ad b: et differētia a ad b sit c. erit ergo c cōstitutus ex e differētia f ad b eius dimidio et d altero eius dimidio: quare d equalis e differētia est a ad f. est igitur

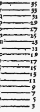
f medius inter a et b. et cum a addat unitatem super c differentiam eius ab unitate b: et f similiter unitatem super c erit a constitutus ex portionibus e f. at f qui est medius numerus maior est portio et e minor. constat itaque inter imparem et unitatem esse unum medium: eundemque esse imparis maiorem portionem quod est primum. Secundum similiter. nam si inter a et unitatem b sit f medius: per diffinitionem a ad f et b ad f equales sunt differentie. eo cum per conceptionem differentia a ad b composita sit ex differentiis a ad f et b ad f. illa cum in duo equa dividi possit: erit par. et illam numerus a unitate superat. a igitur per diffinitionem est impar. quod est secundum et totum propositum.

14 Inter parem et unitatem vel nullus erit medius: vel duo minorque paris dimidium. quod si inter ipsum et unitatem duo fuerint medii: eum esse parem necesse est.



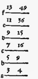
Sit a quilibet par: et b unitas: si a sit par primo sequens unitatem cum sola unitate distent: inter a et unitatem nullus erit medius. quod si amplius unitate distent: dico primo inter a et b duos esse medios: minoremque esse paris dimidium. Secundo quod si inter a quemcunque numerum et b unitatem duo medii consisterint: a esse parem. Primum ostenditur. nam a paris ab unitate b differentia est impar. quare ideo per parem et imparem unitate distantes per nonam huius partiri potest. partiatur itaque illa differentia in duas tales portiones. et hic capio c numerum: cuius quidem minor portio sit differentia ad b. per conceptionem maior portio erit differentia a ad c. at maior portio minorem unitate superat. capio ergo numerum continue sequentem c qui sit d. differentia enim a ad d: minor erit unitate differentia a ad c. quare differentia a ad d et c ad b sunt equales. sunt igitur c et d medii inter a et b. et quia per secundam primi c est medietas d et differentie c ad b simul iunctorum: et d et differentia c ad b equantur a: cum d et differentia c ad b addant unitatem a ad c et c ad b. est igitur c minor mediorum medietas paris a. et hoc est primum. Secundum declaratur. nam si inter a et unitatem b: sint duo medii ut c d: quorum c sit minor: et d maior: differentia c ad b minor est unitate differentia ipsius c ad a. earum igitur una est par: et altera impar. addite igitur simul per secundam huius constituunt numerum imparem: qui per conceptionem est differentia a ad b: cui si quidem addideris unitatem: constitues a. est igitur a par. quod est secundum.

15 Si impares omnes ab unitate disponantur et totidem post quemlibet sumantur: quotus ipse ab unitate fuerit: extremum ab illo numerari conveniet. et item totus ab illo quotus ipse a primo idem a primo numerabitur: sicque deinceps. omnesque in medio relicti erunt primi.



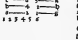
Sint a/b/c/d/e/f/g/h/k/l/m/n/o/p/q/r/s impares ab unitate consequenter dispositi: et quotquot ulterius voles. dico primo quod si accepto a qui ternarius est primo ab unitate impare: quotus ipse est ab unitate totum imparem post ipsum accipias ut d: d est tertium: a ipsum numerare. et si totum iterum post d accipias ut g: iterum a ipsum numerare. et si totum post g ut l: iterum a ipsum numerare. et ita consequenter. Secundo: medios omnes ut b c/e f/h k: et ita consequenter ad a esse primos. Primum probatur. nam quia ternarius tertius est ab unitate: tres post accepti impares et ipse sunt quattuor. quare inter a ternarium et d tertium post ipsum sunt b et c duo impares medii: et tres differentie equales. imparium enim continue ordinatorum ad impares differentia est binarius: differentie scilicet totidem quot sunt unitates in illo. sed tota differentia d ad a per conceptionem bis repetitam: componitur ex illis tribus differentiis. igitur a in unam illarum ductus: producit totam. at ipse toti differentie additus: constituit d. igitur a numerat d. et similiter ostenditur a numerare g. sunt enim quinque intermedii impares et sex binarii differentie equales: duple quidem tribus primis. et differentia g ad a est composita ex illis sex. ergo a per vicesimamtertiam primi illam numerabit. at a toti differentie g ad se additus constituit g: a igitur numerat g. et similiter numerabit l. quia differentia l ad a erit tripla differentie d ad a. consimiliterque numerabit o. quia differentia quadrupla. et hunc in modum consequenter. Secundum probatur. nam primo a non numerabit b: quoniam quidem detracto a de b. per duodecimam primi a numeraret binarium differentiam residuam maior scilicet minorem. quod est impossibile. neque per idem numerabit c. nam ipso substracto d c numeraret differentiam c ad a. que cum sit binarius bis sumptus: si substrahatur ab illa differentia numerabit residuum differentiam scilicet differentie que erit unitas: maior scilicet minorem: et numerus unitatem. quod est impossibile. Ita quoque probabis e et f et reliquos intermedios esse primos ad a. nam si a numeraret e: substraho e ab g. et quia a numerat g ut ostensum est et e per hypothesim numerum substractum: ergo per duodecimam primi numerat differentiam e ad g: que est constituta ex duobus binariis. quod nuper monstratum est impossibile. Similiter si numeraret f substraho f ab numero g: et residuus erit binarius ut notum est: et a numerat g et detractum f: ergo numerat residuum qui est binarius maior minorem. quod est impossibile. Et ita probabis b numerare g/n/s: sed intermedios omnes esse ad b primos. et c numerare l et s et intermedios ad ipsum esse primos. habebisque consimili ubique argumentatione propositum. atque ita habentur impares relictos qui post aliquem totorum toti non veniunt: omnes per tridecimam huius esse primos.

16 Si ab unitate impares coacervantur: qui provenit erit quadratus.



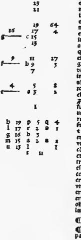
Sit unitas: et suo ordine consequentes impares a/b/c/d/e/f. dico unitatem et a constituere quadratum. Item unitatem a et b constituere quadratum: et unitatem a b et c. et ita consequenter quotquot sint aggregaveris. divido enim a primum imparem in duas portiones unitate distantes: et certum est maiorem distare unitate ab unitate et minorem unitati esse equalem: quas uno ordine situo iuxta primam unitatem. certum est duos esse ordines ab unitate sumptos usque ad duos unitate distantes (unitatem enim hic nomine numeri censemus) ergo per tricesimamtertiam sexti unitas et due ille portiones aggregate constituunt quadratum. at due ille portiones equantur impari unitatem sequenti. unitas igitur et a impar sequens simul iuncta constituunt quadratum. Item resoluto a in unitatem et binarium: cum binarius sit differentia b ad a: b resolvetur per nonam huius in duas portiones: quarum una erit binarius: et altera binario unitate maior: id est equalis a. quas cum prima unitate statuatur uno ordine iuxta portiones a. tunc erunt duo ordines ab unitate ad numeros usque unitate distantes dispositi: ergo per eandem tertiam et tricesimam sexti illi simul aggregati constituunt

quadratum. at vnitas cū portiōibus b ꝛ portionibus a equatur vnitati a et b simul: igitur vnitas a ꝛ b sic aggregata ꝯstituūt quadratū. Sinꝫ si diuidas c in duas portiōes a vnitate distātes: cū c supet b solo binario maior eiꝰ portio sola vnitate maior erit maiore portione b/ ꝛ minor eq̄lis maiori. statuā ergo eas iuxta portiones b. et sic erūt duo ordies ab vnitate vsqꝫ ad nūeros vnitate distātes dispositi. ergo illi sic aggregati per eādem tricesimāmtertiam sexti efficient quadratum. at vnitas et ille portiones sic equātur vnitati a/b/ ꝛ c. igitur illa simul aggregata similiter ꝯstituūt quadratum. ꝛ ita de quolibet alio argumētaberis ordinādo portiones vnitate distātes vt inceptum est p duos ordines. Nā quia sequēs impar ab inferiore sp binario distat: ideo eius mior portio maiori inferioris equabit: ꝛ maior sequētis eādem inferioris maiorem vnitate supgredietꝛ. sicqꝫ clarum habebis ꝓpositū. Et ex hac cognoscit qḋ in tertio auditiōis phisice ex Pithagora adducit aristoteles suis quadratis ꝯsequēter adiūctos impares nunq̄ mutare spēm: sed sp q̄dratos relinq̄re. hincqꝫ impares quadratoꝝ gnomonas appellari.



¶ Si pares ab vnitate sibi coaceruētur: coaceruatus ab oibus erit altera pte lōgior. 27

¶ Dispono pares ab vnitate a/b/c/d/e/f: ꝛ quotquot voluero: dicoqꝫ a ꝛ b simul: eē altera pte lōgiorē et a/b/ et c. similiter a/b/c/ ꝛ d. et ita ꝯsequēter. nam ipsos p equalia diuido: quoꝝ vnas medietates hinc et alias illinc ordino. et quia p decimāoctauam huius illi erant dupli numeroꝝ ab vnitate seriatim ꝓcedentiū: ordines illi ab vnitate fm naturalem numeroꝝ seriem ꝓcedunt: ergo per tricesimāquartam sexti: duo prima media ꝛ duo secūda simul coaceruata ꝯstituūt alterā parte longiorem. at illa equanꝫ a ꝛ b simul ꝛ p eādem tricesimāquartam duo tertia media cū medijs prius positis cōstituūt altera pte longiorem: et illa equātur a b et c: et ita ꝯsequēter. sicqꝫ constat propositum.



¶ Si dispositis imparibus ab vnitate duo primi post vnitatem ꝯiūgantꝛ: ac post illos tres: post quos vo quattuor sicqꝫ deinceps scḋm naturale numerorum augmentum: qui ꝓducētur erunt cubi. latusqꝫ cuiuslibet ꝯiunctoꝝ imparium numerus. 28

¶ Disponātur ab vnitate impares: p̄mo vnitas p se que est cubus ꝛ cubi eiꝰ: latus. deinde primi duo impares vt a. post quos tres sequētes p se vt b. post quos quattuor vt c. dehinc quinqꝫ. postea sex. et ita ꝯsequēter fm naturale augmentū numeroꝝ dico duos p̄mos aggregatos facere cubum: cuius latus est numerus impariū: id est binarius. Similiter tres alios ꝯgregatos cōstituere cubum: cuiꝰ latus est nūerus illoꝝ impariū ꝯiūctoꝝ. i. ternariꝰ. et ita deinceps. capio primo aliquē nūerum fm quē sumūtur impares ad cubum ꝯstituendū: sitqꝫ p̄mo par vt c: cuius quadratus sit g. q2 eni c per ꝯceptiōem totus est ab vnitate quota ps eius est vnitas: erit vt ipse et vnitas et oēs infra eum numeri vt a et b tot sint numeri quot in ipso sunt vnitates. et cū numeri fm naturale nūeroꝝ augmentum sint capti: ipe totus erit parium quot sub ipso sūt impares vnitatem enī imparem voco: tot igitur impares sub eo sunt q̄t in eius dimidio sunt vnitates. dispēdātur ergo duo ordines ab vnitate: quoꝝ vnus terminetur in c/ ꝛ alter in b: sitqꝫ b minor c vnitate. quia enim per tricesimamtertiam sexti illi simul aggregati ꝯstituūt quadratum: cuius latus est c. quiḋ vē quadratus positus est eē g ꝛ c eē par: quare p decimā huius/ ꝛ g eius q̄dratus est par. Et hinc q̄qꝫ euenit vt medietas c cū b ꝛ inferioribus b sit tanq̄ medietas q̄drati g. ideo quot vnitates in b et inferioribus eius et dimidio tot erūt impares vsqꝫ g: q2 numeris p ordinē dispositis q̄libet par tot impares sub se hēat: quot in eius medietate ꝯtinet vnitates. Sumo item tot impares vltra g: quot sunt vnitates in reliqua medietate cuiusqꝫ vltimꝰ h. erit ergo h totus imparium ab vnitate quot vnitates sunt in c ꝛ in inferioribus eius: sed prius sumptorum imparium vltim vt k totum ab vnitate eē manifestum est. erit igitur k idem cū h. et qm̄ imparium fm se sumptoꝝ medietas est supra g sumpta: reliqua medietas erit infra g locata. et q̄a g per scḋam primi duoꝝ circūstantium ꝓximorū est medietas: vt in figuratiōe l et m. et per eādē duoꝝ alioꝝ: vt h et n medietas. et ita quotq̄t fuerint. ergo adiuuante vndecima primi eueniet vt numerus ex illis imparibus aggregatus sit tanq̄ numerus ex c imparium nūero in g ꝓductus. erit igitur ꝓductus ex illis imparibus cubus atqꝫ nūerus imparium latus eius. qḋ est ꝓpositū quo ad hoc. Sit scḋo b numerus impar aliquoꝝ imparium fm quem ꝯstituēdus est cubus: cuius quadratus sit f. quia enī b est impar: igitur p vndecimam huius ꝛ f est impar. diuido enī f in duas portiones inequales ꝛ vnitate distātes p decimānonā huius quaꝝ maior sit p/ et minor q. quia enī f numerus impar supfluit fm numerorum seriem absqꝫ pari hinc fiet vt quoties vnitas in p totus imparium sit f ab vnitate: et quoties vnitas in q tot sint pares sub ipso. cōstituo itaqꝫ duos ordines: primum ab vnitate vsqꝫ b/ et scḋm ab vnitate vsqꝫ a. sitqꝫ b maior vnitate a. et intelligo b diuisum in duas partes vnitate distātes: q2 est impar. quaꝝ maior sit r/ et minor sit s. per tricesimāmtertiam sexti: illi aggregati ꝯstituūt quadratū: cuius latus est b. sicle aūt quadratus positus est f. quare adiuuāte eadem a cū suis inferioribus ꝛ r maiore portione b tot cōtinent vnitates: quot ꝛ continētur in p. sunt igitur tot impares supra f: quot vnitates in s. sit ergo vltimus t. quia enī f totus erat imparium ab vnitate quot sunt vnitates in s in inferioribus ꝛ in r. ergo t totus est imparium ab vnitate: quot sunt vnitates in b ꝛ in oībus suis inferioribus. sed ꝛ sumptoꝝ imparium vltimus totus erat ab vnitate. q̄re t est illoꝝ vltimus. numeri igiꝛ b: assignatoꝝ imparium tot sunt supra f quot infra eritqꝫ f illoꝝ medius. oēs igitur per idem qḋ prius cū f ꝯnumerati: erunt tm̄ q̄tum ipe per numerum oīm: id est b multiplicatus. et qm̄ b in se ꝓducit ipm f/ manifestum est b in ipm ꝓducere cubum: cuius latus est ipse b numerus assignatoꝝ imparium. sicqꝫ totum constat propositum.

¶ Numeri ab vnitate dupli: sunt pariter pares tantum. 29

¶ Ordinētur ab vnitate oēs ꝯsequēter dupli: dico eos oēs esse pariter pares. et nullos preter eos esse pariter pares. cum ei duplus vnitate sit binarius qui est par/ ꝛ secūdus illoꝝ numerorum ab vnitate

ꝓportionalis: ꝑ vicesimam huius oēs alij sunt pares. et cū binarius scđs ab vnitate sit nūerus ꝑmus: ergo per vicesimāsextam quarti quicūq; assignabit eo facto vltimo: nullus ipm numerabit nisi aliqs in ordine illoꝝ parium ātecedētiū positus. quare cū quilibet erit par quē nullus impar ꝑter vnitatem nūerat: ꝑ diffinitiōem quilibet eoꝝ erit pariter par. at ꝙ nullus ꝑter eos sit pariter par ꝓz. nam si detur alius: diuidat per mediū: et eius medietas ꝑ mediū. et ita donec occurrat q̄ nō possit āplius diuidi. qui si fuerit impar qm̄ ꝑ vicesimātertiam ꝑmi nūerabit extremū: non erit nūerus datus pariter par: q̄lis ponebatur. si aūt fuerit vnitas: q: eius duplum fuit binarius: ipse erit de numeris ab vnitate duplis.

30 ¶ Si pariter par in pariter parem ducatur: ꝓducetur pariter par.

¶ Sint a et b duo numeri pariter pares: ducaturq; alter in alterum et ꝓueniat c. dico c esse numerum pariter parem. Nā si c non sit pariter par: numeret ergo cum quicūq; impar si possibile est qui sit d. q: ergo d impar numerat c ꝓductum ex duobus a et b in se ductis: ergo per quītam tertij d impar cōicat cum altero a aut b. numerabit ergo cōiter quicūq; numerus: d et a aut b. qui q2 d ponitur impar: per decimātertiam huius erit impar. numerabit igitur impar a aut b numerum scz pariter parem. qđ est impossibile. non igitur c numerabit ab impari: qui cū per duodecimam huius sit par: ꝑ diffinitiōem constat ipm esse pariter parem. quod est propositum.

31 ¶ Quicunq; numerat pariter parem: ipse quoq; est pariter par.

¶ Sit a pariter par: quē numerat b quicūq; numerus: dico b esse numerum pariter parem. nam si b esset nūerus impar cū positus sit numerare a: non eēt a nūerus pariter par. quod ē ꝯtra hypothesim. erit igitur b numerus par: qui si non fuerit pariter par numerabit eum aliquis impar. quare et idem impar ꝑ vicesimātertiam primi numerabit a numerum pariter parem. qđ est impossibile. manifestum est ergo nullum imparem numerare b. quare per diffinitionem est pariter par.

32 ¶ Si sumātur quotlibet nūeri pariter pares ab vnitate ꝓcedentes: oēs et vnitas cum eis coacervata numerum ꝓximo pariter pari: vnitate minorem efficient.

¶ Sit vnitas: et a/b/c/d/e ordine ꝓcedētes pariter pares: dico q2 vnitas a b c d sit aggregata ꝯstituūt numerum vnitate minorem e. nam ꝑ vicesimānonam huius quilibet sequētiū est duplus ꝓcedētis: q̄re sequens est tanq̄ precedens duplicatus. At a secūdus ab vnitate supat eā vno: quare vnitas et a minus sunt vno q̄ ipse a duplicatus. ergo minus vno q̄ b. quare vnitas a et b minus vno q̄ b duplicatus: ergo q̄ c. q̄re vnitas a b et c minus vno q̄ d. q̄re itez vnitas a/b/c/et d simul minus vno q̄ e. qđ est ꝓpositū.

33 ¶ Omnis numerus cuius medietas est impar: est pariter impar.

¶ Sit numerus par a: cuius medietas sit c numerus impar et b binarius: dico a eē numerum pariter imparem. nam q2 a c est medietas a: ergo b binarius numerabit a scđz se. dico rursum ꝙ quicūq; alius par numerabit a scđm imparem ipm numerare. et esto vt e alius par ipm numeret scđm d: dico d esse imparem. nam q2 a qđ fit ex d in e est a/ et qđ ex b in c similr est a: ergo ꝑ vicesimāquītam secūdi q̄ ꝓportio d ad b ea est c ad e. ergo ꝑmutatim que d ad c ea est b ad e. at cū oīs numerus par alius a binario fiat cōtinue addēdo binarium ꝑmo ad binarium et deinde ad suū precedentem: binarius ergo oēm parem numerat. b q̄ numerabit e: quare et d numerabit imparem c. est ergo d per decimātertiam huius impar. quicūq; ergo par numerat a scđm imparem cum numerat: quare ꝑ diffinitiōem a est pariter impar. quod est propositum.

34 ¶ Si impar in numerum pariter imparem ducatur: qui ꝓueniet erit pariter impar.

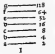
¶ Sit a numerus impar: b vero pariter impar: et c numerus ꝓductus ex a in b. dico c eē numerum pariter imparem: sit eni d medietas c cū c per duodecimam huius sit par/ et e binarius. q2 e in d facit c et similiter a in b facit eūdem c: ergo ꝑ vicesimāquintam secūdi que ꝓportio e ad a: ea est b ad d. quare permutatim que ꝓportio e ad b ea est a ad d. sed e binarius impariter est in b: cū b sit pariter impar. ergo et a impar est impariter in d. nūeratq; a nūerum d scđm imparē. ergo ꝑ vndecimam huius d est impar et c per precedentem: cū eius medietas d sit impar: erit pariter impar. quod est propositum.

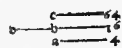
35 ¶ Numeris paribus ab vnitate dispositis tertius a ꝑmo: atq; ab illo tertius: vno q̄q; intermisso oēs a prius sumptis tertij: sunt pariter impares tm̄.

¶ Continuētur pares ab vnitate: sintq; a/b/c/d/e/f/g/h/k/l/m: et sit ꝯsequēter. dico tertiū c: et e ktiū ab illo: et g rursus ab hoc tertium et ita deinceps vno sꝑ intermisso eē pariter impares. Nā ꝑ decimā octauam huius illoꝝ parium medietas sunt numeri ab vnitate naturali ordine dispositi: quoꝝ vnus est par/ et alius impar alternatim positi. primi ergo parium. i. binarij qm̄ medietas eius ē vnitas que potētia ē impar: erit et potētia pariter impar. secūdus vo ab eo nō erit pariter ipar: q: eius medietas est par. At c tertius et quīt9 et septimus et nonus erūt pariter impares per penultimam huius cū eoꝝ medietates sint impares. qđ est ꝓpositum quo ad hoc. Neq; alij pares quicūq; erūt pariter impares: q: eoꝝ medietates sunt pares sicq; par vt binarius eos scđm parem numerabit: quare ꝑ diffinitiōem non erunt pariter impares. quod est totum propositum.

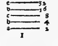
36 ¶ Numeroꝝ pariter imparium continue sumptoꝝ: equales sunt differentie.

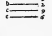
¶ Hoc eni ideo est ꝙ si oēs pares ꝯtinue sumanř: erit oīm illoꝝ eadem dria. nā binarius. Sūptis igiř ꝯtinue pariter impares vno intermisso: erunt per ꝯceptiōem eoꝝ ꝑm exigētiam precedētis paribus et ꝯtinue pariter impares vno intermisso: erunt per ꝯceptiōem eoꝝ differētie ex differētijs ipsoꝝ ad medios composite: quaꝝ cū media sint equalia/ et tote per ꝯceptiōem erunt equales. quod est propositum.

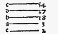


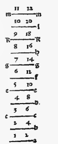














¶ Numerus a duobus non duplus cuius medietas est par: est impariter par. 37

¶ Sit a qlibet nūerus par cui⁹ medietas b sit par: et non sit a de nūero duplo⁊ ab vnitate sumpto⁊. dico a esse numerum impariter parem. Nam cū eius medietas b sit par: non est pariter impar. ⁊ cum nō sit de numero duplorum ab vnitate sumpto⁊: ergo per vicesimānonam huius non est pariter par. a sufficienti igitur diuisiōe est impariter par. qd est ꝓpositum. Sed ⁊ ostēsiue sic. cū medietas a sit par/ et binarius nūerus par scdm eam ipm numeret: per diffinitiōem a: non est nūerus pariter impar. sed er cum non sit de numero duplo⁊ ab vnitate sumpto⁊ si ipse in duo media diuidatur: ⁊ media ite⁊ in media. in hac ɔtinua diuisiōe necesse ē aliud ab vnitate occurrere: qd diuisionem in duo media sistat. quare numerus ille erit impar. et qꝛ ille est pars partis: ergo ꝑ vicesimātertiam primi est ⁊ ps totius. quare per decimāquintam huius ille impar totū scdm parem numerabit. at cū par ipm scdm parem numeret: ergo per diffinitionem a totus: est impariter par. quod ite⁊ est propositum.

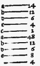


¶ Ex ductu pariter paris in impariter parem: ꝓuenit impariter par. 38

¶ Sit a numerus pariter par: ducaturqꝫ in b impariter parem ⁊ ꝓueniat c. dico c esse nūerū impariter parem. Nam ꝑ hypothesim a numerus par numerat c scdm b qui est par. et qꝛ impar numerat b cum sit impariter par: idē impar ꝑ vicesimātertiam ꝑmi numerabit c. et non nisi scdm parem: alioquin per vndecimam huius c eēt impar. cōstat ergo ꝑ diffinitionem: c esse impariter parem. et propositum.

¶ Ōis impariter par fit ex pariter pare in pariꝭ imparem. Quo fit vt oēm impariter parem: numeret pariter par impariter. 39





¶ Sit a quilibet nūerus impariꝭ par: dico ipꝫ fieri ex pariter pare in pariter imparem. nā medietas a ē par. alioquin a esset pariter impar. esto itaqꝫ b medietas a: si medietas b sit impar: ꝗ b ꝑ tricesimā tertiam huius est pariter impar. et cū binarius numeret a ſm b cōstat pariter parem numerare a ſm pariter imparem. at si b medietas impariter paris a/ sit par: sit ea d cuius quidē medietas sit impar. Dico d per tricesimātertiam huius erit pariter impar. et ꝑ vicesimātertiam primi numerabit a. sitqꝫ hoc ſm e: et sit c binarius. qꝛ b nūerat a ſm c: et d nūerat eū dē scdm e: ergo ꝑ vicesimāquintam scdi q̄ ꝓportio b ad d ea est e ad c. sed b est duplum d: igiꝭ ⁊ e duplū c. quare per decimāoctauam huius e est pariter par: ⁊ numerat a ſm d pariter imparem. ɔstat ergo ite⁊ ꝓpositū. et si tertius nūerus primum diuisione facta occurreret pariter impar: accepto penultimo parium loco b/ ⁊ eius dimidio loco d ⁊ e loco c: per eādem vicesimāquintam scdi ɔcludes ꝓpositum. et vniuersaliter quoties hec subdiuisio fiet: toties fiat ab vnitate pariꝭ pariū duplatio. et sumpto penultimo parium cū suo dimidio ꝑ tricesimātertiam huius ⁊ vicesimāquintam scdi ɔsiliꝭ ɔcludes ꝓpositum. Correlariū patet accepta medietate pariter imparis ⁊ duplo pariꝭ paris: quidē pariter par cū pariter impare nūcrabat impariter parem adiuuante sꝫ vicesimaquinta secundi.

¶ Si disponātur in longum pariter pares: ⁊ in latum pariter impares: qui scdm angulares cōuentus ꝓducūtur: sunt impariter pares tm̄. et ipo⁊ in longitudine quidem est similitudo ꝓportionum: in latitudine ꝟo differētiarum equalitas. 40

Latitudo — Pariter impares		Longitudo							Dorū equales sunt differentie
		¶ Continue proportionales.							
		26	52	104	208	416	832	1664	
	m	22	44	88	176	352	704	1408	
	l	18	36	72	144	288	576	1152	
	k	14	28	56	112	224	448	896	
	h	10	20	40	80	160	320	640	
	g	6	12	24	48	96	192	284	
			2	4	8	16	32	64	
			b	c	d	e	f		
		¶ Pariter pares.							
		Longitudo							

¶ Disponātur b/c/d/e/f pariꝭ pares ſm longum: ⁊ g h k l m: pariter impares scdm latum Dico ꝑmo qui ꝓducūtur ex b in g/h k l m ⁊ ex c in eisdem: ⁊ siliter ex d/ e ⁊ f in eisdē: esse impariter pares ⁊ solos tales. nam oēs illi fiunt ex ductu pariter paris in pariter imparem. ꝗ per tricesimāoctauam huius quilibet eo⁊ est impariter par. et si alius esset impariter par ꝑter eos q ex illis pariꝭ partibus ſm suā seriē ordiatis ⁊ pariter imparib⁹ ꝓducūtur: ille nō fieret ex pariter pare in pariter imparem. qd per ꝑcedentem est impossibile. ratum est ergo qd dicitur. ¶ Secūdo dico oēs in lōgitudine vt oēs in linea g ⁊ oēs in linea h: ⁊ ita de reliquis/ eē ɔtinue ꝓportiōales. nam qꝛ a b binarius ꝑmus pariter parium duciꝭ in g: manifestū est scdm in linea g: qui inde ꝓducitur esse duplum ad g: ⁊ in ꝓportiōe c ad b. sed ⁊ qꝛ b in g facit scdm ab ipo g et c in g facit tertium: ergo ꝑ octauam secūdi q̄ ꝓportio c ad b ea ē terty ad scdm. et ita ɔsiliter ostēde de reliquis ꝑ octauam secūdi adiuuāte vicesima nona huius que b/c/d e f continue proportionales eē demōstrat. Et ex hoc demōstrare prōptum est per vicesimāsextam secūdi qd fit ex ductu vnius medio⁊ in se: tm̄ esse q̄tum qd fit ex ductu circūsposito⁊ vni⁹ in alterū. et ꝑ vicesimāquītam eiusdē quod fit ex ductu vnius medio⁊ in aliū: tm̄ esse q̄tum quod fit ex ductu circūsposito⁊ ⁊ equaliꝭ ab eis distātium vnius in alterum. ¶ Tertio dico oēs numeros ſm latitudinem in vnaquaqꝫ linea⁊ ab g incipiētes et ad m in latum euadentes: equales hr̄e differētias. qꝛ enī in prima linea que est pariter imparium dfie ɔtinue sint equales: statim per tricesimāsextam huius est cognitū. Sꝫ qꝛ secūde linee numero⁊ eq̄les sint differētie/ declaraꝭ. nam ꝑ nonam primi tm̄ est qd fit ex b in g ⁊ in differentia h ad g q̄tū quod fit ex b in h. addit igiꝭ qd fit ex b in h secūdus scꝫ impariter parium secūde linee sup eo quod fit ex b in g

pmo scz impariter parium eiusdem lineetm̄ q̄tum est quod fit ex b in differentiam g ad h. et quia itez per eandem nonam primi tm̄ est quod fit ex b in h et in differentiam k ad h: q̄tum qd fit ex b in k. addit igitur qd fit ex b in k sup eo qd fit ex b in h scz tertius impariter parium sup secundum: q̄tum est qd fit ex b in differentiam k ad h. sed differentia k ad h tanta esse ꝓbata est: q̄ta differentia h ad g. est igit eqlis dfia illoꝝ impariter parium. et ita ꝯsequenter ꝑ nonam de reliquis expedies. Et ex hoc facile demonstrabile est ꝑ scdam p̄mi q̄ qlibet illoꝝ duplatus tm̄ est: q̄tum duo circūpositi ꝯiūcti. et ꝑ tertiaz eiusdem primiq̄ duo medꝫ ꝯiūcti tm̄ sunt: q̄tum circūpositi / et equali intervallo ab eis distātes pariter accepti.

41 ¶ Quecunq̄ numerat impariter par: idem etiam est impariter par.

¶ Sit a quicūq̄ nūerus impariter par: qui numeret b. dico b esse impariter parem. Nam quia a par numerat b: ergo per duodecimam huius b erit par. quo fit vt quoties a numerat b: toties medietas a numeret medietatem b. sed medietas a cū sit impariter par est par. igitur ꝑ duodecimā huius et medietas b est par. sed et aliq̄s impar numerat a numerum impariter parem: igitur idem numerabit b ꝑ vicesimātertiam primi. est igitur b per diffinitiōem numerus impariter par. quod est propositum.



42 ¶ Si pariter impari impariter par: siue pariter par sup binarium ꝯiūgatur: ꝯpositus erit pariter impar.

¶ Sit a quicūq̄ pariter impar: cui adiūgat̄ b quicūq̄ impariꝫ par aut pariter par sup binariū: sitq̄ c compositus. dico c esse pariter imparem. nam q2 a est pariter impar: ei9 medietas est impar. et quia b est impariter par: per tricesimāseptimam huius: eius medietas est par. medietas igit̄ b et medietas a simul ꝑ scdam huius ꝯstituūt numerum imparem. at numerus ex medietate a et medietate b ꝯstitutus: est medietas compositi c. igit̄ per tricesimāsextam huius c est pariter impar. et ita argumētaberis si pariter impari additur numerus pariter par sup binarium. quod est propositum.

43 ¶ Si pariter impares nūero pares ꝯiūgant̄: ꝯposit9 erit pariter par vl' impariꝫ par.

¶ Nam quia cuiuslibet illoꝝ medietas est impar: per quartam huius compositi medietas erit par. non est igitur compositus per tricesimātertiam huius: pariter impar. quare a sufficiēti diuisione erit aut pariter par / aut impariter par. quod est propositum.



44 ¶ Si pariter impares numero impares coniūgant̄: componetur pariter impar.

¶ Nam quia cuiuslibet illoꝝ pariter imparum medietas est impar / et sunt in numero impari: igitur per quintam huius illoꝝ medietates coaceruate ꝯstituūt numerum imparem. ꝯpositi igit̄ medietas est impar. ergo per tricesimātertiam huius: compositus est pariter impar. quod intenditur



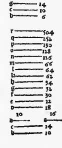
45 ¶ Si diuersi pariter pares q̄libet supra binarium sibi coaceruētur: ex ipsis cōstitutus erit impariter par.

¶ Sint a / b / c / d quotlibet nūeri pariꝫ pares supra binarium et d maximus: sitq̄ e duplus ad d: sitq̄ f ꝯpositus ex a / b / c / d. dico f eē impariter parem. nam q2 a b c d sunt pares: ꝑ primam huius f est par. et q2 sunt a b c d pariter pares supra binarium: eoꝝ medietates sunt numeri pares. addire ergo simul per primam huius ꝯstituūt parem. et q2 ꝑ tricesimāscdam huius a / b c d simul aggregati minus sunt q̄ e: ergo f est minor e. at e est p̄mus pariter par post d: igitur f non est pariter par. et cum eius medietas sit par: ergo per tricesimāseptimam huius: est impariter par. quod est propositum.



46 ¶ Pariter impares fm̄ datū nūerum parem inuenire: qui ꝯiūcti faciāt pariꝫ parem.

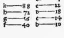
¶ Sit primo a nūerus par fm̄ quem iubemur pariꝫ impares tales qui ꝓponitur inuenire: q̄ et idem a sit pariter par. quot ergo sunt vnitates in a: tot ꝯtinuo pariter impares ab vnitate quoꝝ medietas sit b c: sitq̄ d ꝓximus ascēdendo pariter par. et si inter c et d sit itez aliq̄s pariter impar: ctres d hinc et inde sumo pariter impares fm̄ dimidium a: ita vt oēs sint sumpti fm̄ numerum a. sintq̄ inferiores: c g / et supiores e f. quia eni d est par / et nō est pariꝫ impar: per tricesimāquītam huius p̄mi pares hic et inde g et e sunt pariter impares. quare et g e equaliꝫ distant a nūero d. et q2 similiter ꝑ eādem vno pari interposito post e seq̄tur f: et vno interposito post g seq̄tur c. etiā equidistabūt hic et inde c et f ab numero d. ergo ꝑ scdam p̄mi g et e simul sunt duplum pariter paris d. quare ꝑ vicesimānonam huius g et e simul sunt pariter par. et ꝑ eādem scdam primi c et f simul: sunt duplum deiusdez pariter paris. sunt igitur pariter impares simul sumpti fm̄ numerum a scz g / e / et c f quadruplum d: et duplū duplo ad d. quare per vicesimānonam huius c / g / e / f simul sunt pariꝫ par siue sunt tm̄ q̄tum qd fit ex a pariter pare: in d pariter parem. quare ꝑ tricesimam huius: q̄ inde ꝓducitur est pariter par. quod itez est propositum: quo ad hoc. At si a non sit pariter par: capio quēcunq̄ numerum pariter parem vt a alterū: qui vltro / citroq̄ hēat pariter impares: vt b / c / d / e. et sumo duplum a: q̄ sit g. qui etiā per vicesimānonam huius est pariter par. sintq̄ f / h sui circūpositi pariter impares. deinde capio l duplū g: qui etiam est pariter par. et k / m circūpositos pariter impares. similiter capio o duplum l et circūpositos pariter impares n / p et hoc toties eoq̄ vsq̄ fiat quousq̄ habeamus pariter impares acceptos fm̄ numerum datum a: quos quia hic totidē accepi dico numerum ex b / c / d / e / f / h / k et ceteris sumptis pariter imparibus: ꝯpositū esse pariter parem. et sit q pariter par acceptus duplus ad o. quia eni per scdam primi c d simul: sunt q̄tum g duplum a. et etiam per eādem b e: q̄tum g duplum a. igitur c / d / et b / e simul: q̄tum l duplū g. sed per eandem scdam primi f h q̄tum l duplum g. ergo b / c / d / e / f / h: q̄tum o duplum l. sed k m: q̄tum o duplum l ꝑ eādem scdam. igitur b / c d e f h k m: q̄tum q duplum o. sed et per eādem scdam n p q̄tum q duplum o. igitur b / c d e f h k m n p simul: q̄tum duplum q. qui per vicesimānonam huius est pariter par. sicq̄ constat propositum.





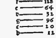
¶ Scdm datum parem: pariter impares sumere: q impariter parem ꝯiuncti ꝯstituāt. 47

¶ Sit a datus numerus par scdm quē iubear sumere numeros pariter impares: qui ꝯiuncti ꝯstituant numerum impariter parem. sumo b/e h/ ꝯtinue numeros pariter pares post binarium scdm medietatē nūeri a circa quos sint c d f g k l circūpositi pariter impares. dico c d f g k l parit impares scdm nūerū a sumptos: simul iunctos ꝯstituere numerum ipariter parem. et sit m duplum h qui etiā p vicesimam nonam hui9 est pariter par quia eni per secūdam pmi c d simul sunt tm q̄tum e duplum b: et p eandē f g q̄tum h. et k l q̄tū m. erūt c d f g k l sic q̄tum tres pariter pares e h m ꝯtinue sumpti post binariū. at e h m simul p quadragesimamquintā huius ꝯstituūt impariter parem: igitur et c d f g k l simul. qd est propositum.



¶ Impariter pares quotlibet reperire: qui coacervati faciant pariter parem. 48

¶ Sit pmo a nūerus datus par scdm quē ppositū est impariter pares reprire: qui coacervati ꝯstituant pariter parem: invenio p q̄dragesimāsextam hui9 totidem parit impares q coacervati ꝯstituāt nūerū pariter parem: qui sint b c d e. et duco aliquē pariter parem in quēlibet eorū: et pueniāt f g h k totidem qui p tricesimāoctauā huius erūt imparit pares. at p nonam pmi idē est qd fit ex illo parit pare in b c d e: et in ꝯpositum ex b c d e. at cōpositum ex b c d e per hypothesim est pariter par: ergo p tricesimam huius quod fit ex pariter pare in b c d e est pariter par. illud aūt est cōpositū ex impariter paribus f g h k scdm datum nūerū inuētis. est igitur effectū qd pponebat quo ad hoc. ¶ Sit secūdo vt a sit impar scdm quem ppositum sit reperire impariter pares qui cōstituūt pariter parem sumo per immediate mōstratū impariter pares scdm parem minorem vno a: qui aggregati ꝯstituāt pariter parem: sintq; b c. sitq; d pariter par ex b c coacervatus. sumo f tertiū pariter parem ab ipso: e quidē medio parit pare interposito. et qz differētia f a d cōstat ex differētia d ad e q̄ est d pariter par et differētis e ad f que est e pariter par: cum sp sequens sit pcedētis duplus. ergo p quadragesimamquītam huius dfīa f ad d est impariter par. sit ergo dfīa illa g. dico ergo b c g eē impariter pares qui petitur. nam b c simul sunt d quibus additus impariter par g tm facit sicut f. nam erat differētia d ad f. at ꝯo f est nūerus pariter par. constat ergo totum propositum demōstratum.





¶ Ex dato nūero: imparit pares ex quibus ꝯiūctis impariter par efficiat inuestigare 49

¶ Sit pmo datus nūerus par qui sit a scdm quem iubemur impariter pares inuestigare: qui ꝯiūcti ꝯstituāt impariter parem. inuenio totidem pariter impares p quadragesimāsextam hui9 qui ꝯiūcti ꝯstituāt pariter parem: sintq; b c d e. capio g pxīm pariter imparē post e. qui qz solo quaternario distat ab e: manifestū est b c d g simul plus eē pariter pare b c d e simul: et minus duplo b c d e simul. quare p vicesimānonam huius: aggregatus ex pariter imparibus b c d g nō est pariter par. et cū p primā hui9 sit par: idem erit a diuisioe aut pariter impar aut impariter par. duco ergo f nūerum quēcunq; parit parem in b c d g: et pueniāt h k l m: totidē quot vnitates in a: qui p tricesimāoctauam huius sunt impariter pares. at aggregatum ex h k l m tm est q̄tum qd fit ex f in b c d g simul p nonam pmi. at si b c d g simul sunt pariter impar: p tricesimāoctauam huius: aggregatus ex h k l m erit impariter par. et si b c d g sit impariter par: idem accidet p quadragesimāpmā huius: sicq; sp habebitur ppositū. Secūdo si a sit numerus impar: sumo totidem pariter impares: qui aggregati p quadragesimāquartā huius erunt parit impar. quos multiplico per quēlibet pariter parem: et pueniēt totidem impariter pares p tricesimāoctauam huius. et qz ipsi impariter pares simul tm sunt q̄tum quod fit ex illo parit pare in aggregatum ex pariter imparibus qui monstratus est pariter impar. ergo per tricesimānonā erit aggregatus ex impariter paribus impariter par. quod est propositum.

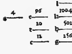
¶ Quotlibet impariter pares: et pariter pares sup binarium: siliuncti: pariter parem vel impariter parem component. 50

¶ Nam oīm medietates pares sunt. at ipe simul: ꝯpositi medietatem ꝯstituūt: ergo p primam huius compositi medietas est par. non est igitur compositus pariter impar. a diuisione ergo aut est pariter par / aut impariter par. quod intendebatur.



¶ Pariter pares et ipariter pares q̄tlibet inuestigare: q ꝯiūcti parit parem cōstituāt. 51

¶ Sit a numerus datus scdm quē debemus aggregare pariter pares et impariter pares qui ꝯstituāt parit parem. capio totidē imparit pares qui p quadragesimāoctauā huius simul cōgregati cōstituāt pariter parem: sintq; b et c. et sit parit par quē ꝯstituāt d. capio totidem ꝯtinue parit pares supra d q sint e et f: certū est e esse duplum d et f duplum e. dico ergo impariter pares b c/ et totidē pariter pares d et e simul ꝯstituere pariter parem. Nam qz b c simul ꝯstituūt d: ergo b c et d simul ꝯstituūt e duplū d sed et per idem b c d et e simul cōstituent f duplum e. at f est pariter par: igitur totidem pariter pares et totidem impariter pares quota ꝯstituūt pariter parem. quod est propositum.



¶ Scdm datū numerum pariter pares reperire: qui cū quotlibet impariter paribus numerum impariter parem constituant. 52

¶ Sit datus nūerus a: scdz quē iubeamur reperire pariter pares: qui cū quotlibet imparit paribus vt sumptis scdm b ꝯstituant numerum impariter parem. sumo pmo p quadragesimāoctauam huius impariter pares scdm b qui sit ꝯstituāt pariter parem: sintq; c d e et ꝯstituant f pariter parem. et sumo pariter pares post f scdm a nūerum datū q sint g h k l quos dico cū impariter paribus c d e ꝯstituere impariter parem. nam qz c d e ꝯstituūt f: ergo c d e et f ꝯstituūt g duplū f. et c d e f et g nūerum h duplū g. ergo c d e et g plus ꝯstituūt q̄ duplum f: et minus q̄ duplū g. et ita argumētabere ꝯsequēter c d e et h

plus ꝯstituere ꝙ̄ duplū g ⁊ minus duplo h. et similiꝛ c d e g ⁊ k plus ꝯstituere duplo h et minus duplo k sicq; deinceps. quare c d e g h k l simul ꝑ vicesimānonam huius non ꝯstituēt pariter parem. ergo ꝑ quinquagesimam huius c d e g h k l simul ꝯstituūt impariter parem. quod est propositum.

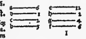
53 ¶ Omnis numerus primus: est diminutus.

¶ Nam ōis numerus solam partem habet vnitatem: que vt certum est minus eo ꝯstituit. est igiꝛ ōis talis per diffinitionem diminutus. quod est propositum.

54 ¶ Quilibet pariter par: diminutus esse ꝓbatur.

¶ Nam per vicesimānonam huius ōis talis est de duplis ab vnitate sumptis: quē ꝑ vicesimāsextam quarti nullus nūerabit nisi aliqua in illo ordine sumptos. at ꝑ tricesimāscdam huius ōēs in illo ordie sīꝛ aggregati p̄cedētes minꝰ illo pficiūt. cōstat igiꝛ ꝑ diffinitiōem illū esse diminutum. qđ est ꝓpositū.

55 ¶ Ōis quem numerat numerus aut abundans aut perfectus: vt abundet necesse est.



¶ Sit a nūerus pfectus aut abūdans: habēs tres ptes b c d easdēq; scdam / tertiā / ⁊ sextam: ducaꝛq; a in quēcunq; numerum vt in c ⁊ ꝓueniat e. erūt ꝯsiles tres ptes q̄ sint f g h. eedēq; scda tertia sexta. quia q̄ ꝓportio b ad a ea est f ad e: ergo ꝑmutatim b ad f vt a ad e. Itē c ad a vt g ad e: ergo ꝑmutatim c ad g vt a ad e. Itē d ad a vt h ad e: ergo ⁊ ꝑmutatim d ad h vt a ad e. erunt ergo tres numeri b c d ad totidem f g h in eadē ꝓportiōe vt que est a ad e. ergo ꝑ vicesimam secūdi b c d simul ad f g h simul sūt in eadem ꝓportiōe q̄ a ad e. tunc sic. b c d simul ad f g h simul vt a ad e: ergo ꝑmutatim b c d simul ad a vt f g h simul ad e. ergo si b c d simul abūdat sup a: et f g h siꝛ abūdabit sup e. et si b c d ꝯplicte pficiunt a: itidem ⁊ f g h ꝯplicte pficiēt e. at si f g h ꝯplicte pficiūt e: cum e ꝑ ꝯceptiōem habeat aliam partem ab ipso denoīatam que est vnitas: ea sidvē predictꝭ adiuncta facit totum abūdare sup e. erit igiꝛ quicūq; talis quem numerat aut abundans aut pfectus: abundans. quod est propositum.

56 ¶ Quicunq; perfectum numerat: est diminutus.

¶ Nam si is qui numerat pfectū diminutus non sit: ꝑ diuisione erit aut pfectus aut abūdans: qui si est pfectus aut abūdans ꝑ precedentem ille quēcunq; nūerat est abūdans at ponitur pfectus. non est igitur perfectus aut abūdans. relinquiꝛ igiꝛ quēadmodum ꝓponitur eē diminutus. qđ est ꝓpositū.

57 ¶ Numerum imparem abundantem inuenire: cuius sumptaꝝ partiū maxia: a posito impare denominetur.



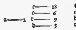
¶ Hec videtur supponere aliquem imparem eē abundātem: qđ ⁊ verum est. Sit ergo a impar positꝰ qui maxiam partium sumptaꝝ imparis abundātis denoīare debet et b quicunq; impariū abūdans qui si sit minor a: duco ipm in aliquē imparem donec eueniat impar maior a qui ꝑ quinquagesimam quītam huiꝰ erit abūdās. si aūt sit maior a: non quero aliū. et ita sit in ꝓposito. deīde sumo impares denoīantes quotquot volo supra a: ita vt a sit denoīatiuū mīnus. alioquin ꝯitatem ꝓpositio hře nō posset: sintq; c d e et duco a in c ⁊ ꝓueniet impar ꝑ vndecimam huius ⁊ d in ꝓductum: ⁊ e in vltimum ꝓductum: et ille vltimus ꝓductus ꝑ vicesimātertiam primi hēbit ptes denoīatas ab a c d e. deīn duco in ipm totum: b. sitq; ꝓductus f qui ꝑ vndecimam huius erit impar: sed et ꝑ quinquagesimāquintam huius erit abūdans. qꝛ a b est abundans ⁊ habet ptes denoīatas ꝑ vicesimātertiam pmi ab a c d e ⁊ b. et qꝛ a priū assumptaꝝ ꝑs denoīata ab a habet minorem denoīationem: qꝛ positus est a oīm denoīans minimus per ꝯceptiōem ꝑs denoīata ab a est oīm sumptaꝝ scꝫ scdm a c d e ⁊ b maxia. qđ est ꝓpositū.

58 ¶ Si aliqs in nūerū primum ductus pfectū numerum ꝓduxerit idem in eo minorem et se non numerantem ductus: ꝓducet numerum abundantem.



¶ Sit b numerus pmus: ⁊ a ductus in b ꝓducat c q̄ sit nūerus pfectus: sitq; d minor b nec numeret a et ducatur iteꝝ a in d ⁊ ꝓueniat e. dico e esse numerum abundātem. nullus enī in aliū ductus nūerabit c: quoꝝ alter non numeret a. vt si f in g ꝓducat c: intelligo f primum / a scdm / b tertium / ⁊ g quartū. per vicesimāquintam secūdi f ad a vt b ad g. sed ⁊ per quartā tertij b numerat alteꝝ. at cum b maior sit a / et g maior f vt supponiꝛ: b nūerabit g. q̄re ⁊ f nūerabit a. ꝯstat ꝙ̄ g nullus in aliū ductus nūerabit c quoꝝ alter non numeret a. et ideo si a eēt primus non haberet c nisi a ⁊ b ⁊ vnitatem ptes suas: et a ⁊ b vnitate distarent. at nulli sunt primi vnitate distātes nisi binarius ⁊ t'narius: cū oporteat alterū eoꝝ esse parem / ⁊ alteꝝ imparem: et ōis alius par a binario / sit compositus. quicūq; igiꝛ sumeretur sub b aut eēt a aut ipm nūeraret. alioquin dicātur non distare vnitate sola vt f et p: qui in se faciant pfectū. non habebit ptes q̄ nisi e f ⁊ vnitatem. at ꝓductus ex illis toties habet in se maiorē e quoties vnitas est in f. at vnitas ⁊ f simul minus faciūt ꝙ̄ e aliq̄tiens sumptus: ergo f ⁊ e ⁊ vnitas non ꝯstituūt pfectū. erit ergo a ꝯpositus. sint ergo eius partes f ⁊ g: queꝑ vicesimātertiam primi numerabunt c. numerēt ergo ipm scdm h ⁊ k. et eedem partes ꝑ idem etiā numerabunt e: sitq; scdm l ⁊ m. eritq; per septimam secundi ter repetitam c ad b h k: sicut e ad d l m. cum ergo c superet b ⁊ h in numeris a f g: superabit etiā e numeros d l: sitq; id in numero n. quē dico eē minus ꝙ̄ a f g. qđ sic ostenditur. qꝛ c ad b h: sicut e ad d l. ergo vt c ad e totus ad totum: et b h ad d l detractus ad detractum. ergo residuus a f g: ad n residuum vt c totus ad e totum. at c maior est e: igitur ⁊ a f g maior n. igitur a f g partes itidem e addite ad d l: plus faciunt ꝙ̄ e. est igitur e numerus abundans. quod erat demōstrandum.

59 ¶ Si numerus in alium ductus perfectum vel abundantem ꝓduxerit: in quēlibet ab eo numeratum ductus abundantem producet.



❡ Sit a quicquid numerus qui in alium ductus vt b ꝓducat c numerum ꝑfectum aut abundātem: ⁊ b numeret d. dico q̃ a ductus in d ꝓducit nūerum abūdantem. nam quia ꝑ septimam secūdi q̃ ꝓportio b ad d ea est c ad e: sed b per hypothesim nūerat d: igitur ⁊ c numerabit e. c aūt positus est ꝑfectus aut abundans. igitur ꝑ quinquagesimāquintam huius ⁊ e abundabit. quod est propositum

❡ Cum dispositi fuerint ab vnitate nūeri pariter pares qui ꝯiūcti fecerint numerum primum: extremus in illum ductus ꝓducet numerum perfectum. 60



❡ Sit vnitas: ⁊ a b c d ꝯtinue dupli: qui ꝑ vicesimānonam huius erunt pariter pares: ⁊ coaceruatus ex eis et vnitate sit e qui ponat esse primus et d extremus partum ducat in e oīm aggregatum ⁊ ꝓueniat f. dico f eē numerum ꝑfectum. manifestum est eni per vicesimātertiam ꝑmi a/b c d duplos sūptos oēs numerare f. sitq̄ id scdm e/g h k vt scz d numeret f scdm e: c scdm g: b scdm h: et a scdm k. quoties ergo vnitas in d toties e in f: et quoties vnitas in c toties g in f. quare ⁊ adiuuāte vicesimasecūda scdi ⁊ equa ꝓportiōalitate quoties a in d toties g in f: et ꝑ idem quoties b in d toties h in f. et quoties c in d toties k in f. Hinc tote ptes sunt e/g h k ad f: sicut vnitas a b c ad d. sed ꝑ tricesimāscdam hui᷒ vnitas et a b et c simul min᷒ sunt vnitate q̃ sit d. quecūq̄ vnitas est ps d denoīata per conceptiōem a b d. ergo e g h k simul minus faciūt f vna eius pte denoīata a numero d. pars aūt f denoīata a numero d: est e. sunt igitur e g h k simul minus f in numero e. at vnitas a b c et d sunt tanq̄ e: igitur e g h k vnitas a b c d simul tm̄ sunt sicut f. si aūt f plures partes non habeat: constat ꝑ diffinitiōem ipm̄ f numerum esse perfectum sed q̄ nullam aliam habeat declaratur. nam si hoc sit possibile numeret ergo m: numerum f scdm n. quē enī e est ꝑmus qui nūerat f: nomerabit ergo per quartam tertiū m aut n. quare ꝑ vicesimā quintam secūdi reliquus eoꝝ numerabit d. et cū a secūdus ab vnitate sit numerus ꝑmus: ergo ꝑ vicesimāsextam quarti quicq̄ nūerat d est aliq̄s in ordine precedentium: vt c b a. at si sit c nūerat f scdm g/ et b scdm h/ et si a scdm k partes scz prepositas et vt dictum est. constat ergo nullum alium a ꝑdictis nūerare f. quare ꝑdicti sunt oēs sue partes. et ipsi simul mōstrati sunt ipm̄ complere atq̄ ꝑficere. constat ergo diffinitionem numeri perfecti ei ꝯgruere: ipm̄q̄ existere perfectum. quod est ꝓpositum.

❡ Septimi elementorum Arithmetice Jordani finis.

f Orme numerorum ex vnitatū dispositiōe ꝯpendūtur. ❡ Est aūt dispositio prima in longum tm̄: altera in longum ⁊ latum: tertia vō in lōgum/ latum/ ⁊ altum. ❡ Cuius vnitatum dispositio in longum tm̄ est: linearis numerus dicitur. ❡ In latum disponūtur supficiales linearibus vndiq̄ ꝯclusi: quoꝝ vnitates directe ⁊ ad se ⁊ ad alias equales habent distantias. Qd̄ fit dupliciter scz vl' vt vnitates vnitatibus directe adaptētur: vel eaꝝ inẽqualis opponātur atq̄ vt singloꝝ ordinum termini in lateribus reliquis excipiātur. ❡ In altum vō dispositio solidorū est: coaptans insimul supficialibus: ex quoꝝ lateribus directe sibi appositis solidorū supficies erecte constituūtur. ❡ Numerorum in superficie dispositorum: quidam sunt triangulares tria habentes latera: alij quadrilateri: alij pētagoni: alij plurū laterum. ❡ Quadrilaterorū aūt quidam latera opposita habēt equidistātia: quidam minime. ❡ Numerorum autem quoꝝ latera opposita sunt equidistātia: alij oīa latera habent equalia ⁊ tetragoni dicūtur. alij siquidē latera habent vnitate distantia ⁊ parte altera longiores vocātur: aut amplius ⁊ dicūtur anlōgiores. ❡ Numeroꝝ in altū ꝯpositoꝝ diuersas esse bases cōtingit: quorūdā triangulas/ atq̄ quadrāgulas: et ita de ceteris. ❡ Horum oīm quidam habent latera simul applicata: ⁊ dicūtur pyramides. quidam habent latera: que etsi insimul tendāt: non tm̄ ꝯueniūt: et curte pyramides appellant. quidam habent latera equidistātia ⁊ equaliter erecta: qui supiorem ⁊ inferiorem supficiem habent similes. Istorū quicūq̄ habent basim triangulam: serratiles vocant: q̄ quadrangulam ⁊ ipsi in longum/ latum/ ⁊ altum equaliter distēduntur: cubi dicūtur. quicunq̄ vō bases habuerint pentagonas hexagonas siue plurium laterum: ⁊ latera equidistantia erecta: colūne nominentur.

❡ Ois numerus triangularis: tria habet latera equalia. Vn̄ manifestum est quēlibet triangularem ex numeris ab vnitate ordine cōtinuo dispositis: esse compositum: atq̄ latus trianguli esse seriei numerum. 1



❡ Sint a b c vnitates basis trianguli: a b ꝓxime: et a c extremitates. dico ergo q̃ in secūdo ordine cuius extremitates sunt d e: erunt pauciores vnitates. nam si totidem fuerint in ordinibus a c ⁊ d e: latera a d ⁊ c e erunt eq̄distātia. qm̄ vnitates in vtroq̄ ordine equalit' distant: sicq̄ non cōcludent triangulum. pauciores ergo erunt in ordine d e. et qm̄ q̄tum distat a ab b tm̄ distat a ab d ⁊ c ab e: si ergo ponitur f tāta ab c quota d ab e: distabit f ab d q̄tum c ab e. et ideo q̄tū m a ab d. si ergo f non fuerit ꝓxima post a sed fuerit b vnitas media: cū distent a ab d q̄tum a ab b: erit longitudo inter a ⁊ f q̄ta inter a ⁊ d et inter f ⁊ d vl' amplius: sicq̄ vnitates earū ad se inuicem et ad alias non equales seruabūt distātias. quod est impossibile. Ordo ergo d e minor est ordine a c vnitate. et eadem rōne ꝑ ordo sequens minor vno

ꝙ precedẽs donec extremũ sit vnitas. et q2 ideo totidem erunt ordines quot in base sunt vnitates: pꝫ retroagendo vnitatẽ esse primũ potentia triangulũ cui due adiuncte secundũ claudunt triangulum: cui secundo tres addite facient tertiũ: q2 semper est vnitate maior precedẽti. et ita cõsequenter scḋm naturalem numerorũ progressum sicq3 propositio ⁊ correlariũ nota sunt.

2 ¶ Si a quolibet triangulari numero latus suum detrahatur: relinquetur triangulus ipsi descendendo proximus.

¶ Triãgulus triãgulo descendẽdo proximus: est cuius latus latere alterius est vnitate minus. a triãgulo ergo a b substracto latere a b. dico ꝙ relinquit̃ triãgulus ipsi triãgulo a b descẽdendo proximus nã q2 triãgulus a per p̃cedentẽ habet etia latera equalia: et sequẽtia sola vnitate vincentia. substracto ergo latere a b erũt reliqua latera vno cõtractiora. sꝫ ⁊ q2 vnitatũ ordines scḋm vnitatẽ semp decrescũt pꝫ per correlariũ precedẽtis residuũ esse triãgularẽ. ⁊ qm̃ latus eius vnitate vinci a latere triãguli a b cognitũ est: patet relictũ triãgularem esse proximũ descẽdendo triãgulo a b: qḋ est propositũ.



3 ¶ Omnis triangularis duplicatus: parte altera longiorem efficit.

¶ Sumãtur a et b duo triãgulares equales: adiiciaturq3 lateri c trianguli a d extrema vnitas triãguli b. itidẽ lateri f triãguli b adiciat̃ e extrema vnitas triãguli a: fientq3 duo latera vnitate quodlibet latus a triãgulorũ a et b superãtia. et si addis aptasq3 hoc pacto medios ordines: vnius mediis ordinib⁹ alterius: fient per tertiam primi cõpositi ordines sibi mutuo et extremis ordinibus e f et c d equales. verbi cã vt si ordinẽ sequentẽ latus c addis adaptasq3 ordini sequenti vnitatẽ d. q2 enĩ per correlariũ prime huius ordo sequens latus c tantũ distat ab c: q̃tum ordo sequens vnitatẽ d distat ab d. ergo per tertiã primi illi simul iuncti equãtur ordini c d. et ita de aliis mediis ordinib⁹ si qui medij relicti sunt tunc ergo cõpletus erit quadrãgulus cuius latera opposita erunt equalia ⁊ ob hoc equidistãtia. vt q2 latus e f equale esse mõstratũ est lateri c d ex mediis: ergo vnitates lateris b d equidistab[unt] vnitatib⁹ lateris a c. ⁊ similiter q2 latus b d equatur lateri e a. nã sunt latera triangulorũ equaliũ ex mediis ordinibus: latus e f equidistabit lateri c d. ⁊ q2 latera b d et e a opposita ⁊ equidistãtia sunt latera triangulorũ assignatorũ: ⁊ duo reliqua e f ⁊ c d similiter opposita ⁊ equidistãtia quorum quodlibet reliquo altorũ vnitate sunt maiora. patet ꝑ diffinitionẽ totã figurã a b d e ex duobus equalibus triãgularib⁹ cõstitutam (quare ⁊ ex triãgulari vno duplicato) esse altera parte longiorẽ: quod est propositũ.



4 ¶ Cuiuslibet altera parte longioris: medietas est triangularis.

¶ Hec est cõuersa precedẽtis. Sit altera parte longior quicunq3 a b e ⁊ vnum eius longius latus a b. dico eius medietatẽ esse triangularẽ. de latere enim longiori a b detraho vnitatẽ a et de c secundo ordine duas: de d tertio tres: de e quarto quattuor. ⁊ si plures sunt tot cõsequenter auferã quotus ordo ille fuerit ab vnitate: per correlariũ prime huius totus detractus vt a e f est triangularis. et per idem q2 continue minus vno relinquebat̃ vsq3 ad vnitatem: relictus est triãgularis. sed et q2 detracti latus e f equatur residui lateri g b. nam latus g e superabat latus g b vna vnitate: sed ⁊ g e superat latus f e vna vnitate. equantur igitur g b et f e: quare ⁊ reliqua vnius reliquis alterius cum per primã huius omnis triãgularis sit equilat̃ ⁊ totus trigonus a e f toti trigono a b g equalis. est igitur datus altera parte longior in duas medietates diuisus quarũ quelibet est triãgularis: quod est propositũ.



5 ¶ Quilibet duo triangulares proximi: tetragonum constituunt

¶ Sit vt in precedẽti a b g e quitunq3 altera parte longior qui per eandem diuidatur in b g h et e a f duos triãgulos equales. erit vt a e sit latus triãguli e a f et latus b a altera pte longioris ⁊ suũ oppositũ e g maius latere a e ⁊ sequẽtibus ordinib⁹ vnitate. Ammoto ergo latere a e remanebit b h equale lateri h l: l: g et g b. ⁊ ideo quattuor illa latera adinuicẽ distantia: quod ergo per diffinitionẽ relictum est: est tetragonus. sed ⁊ ammoto latere a e ab erigono a e f per secundã huius relinquit̃ triangularis triãgulari a e f proximus: quare ⁊ triangulari h b g sibi equali proximus. constat ergo tetragonus h l g b ex duobus proximis triãgularibus: quod est propositũ. ¶ Potest quoq3 et id esse notum quod tricesimoquinto capitulo sue Arithmetices diuus affert Seuerinus omnẽ tetragonũ si ei proprium latus adiciatur aut ab eo detrahatur altera parte longiorem fieri. Nam cum tetragonus omnis vndiquaq3 latera equalia possideat: si cuipiã vnum latus adiiciatur efficientur latera vnitate distantia porro si latus vnum a quopiam detrahatur: relinquẽtur latera vnitate distãtia: quare vtrobiq3 facti erunt altera parte longiores. Quo fit iterũ vt proximi quiq3 altera parte lõgiores a medio tetragono equali differentia distent. Nam equali latere substracto ⁊ addito.



6 ¶ Latere ꝓposito numeri triãgularis summã inuenire. Unde manifestũ est si datus sit numerus impar summã triangularis prouenire si paris proxime maioris subduplum in ipsum imparẽ ducatur. et si numerus sit par: summa triangularis proueniet si paris medietas in imparem ducatur proxime maiorem.



¶ Sit a datũ latus cuiuslibet numeri triãgularis cuius summa querit̃: duco a in b proximũ numerũ maiorẽ ⁊ per diffinitionẽ proueniet altera parte longior cuius b maius latus erit vnitate maius a mi

nore latere ꝛ latere triãguli cuius summaꝫ petit. per quartã ergo huius summa triãguli petiti est medietas altera parte longioris inuenti: sicqꝫ constat ꝓpositum. ¶ Correlariũ ex demõstratione conclusionis adiuuãte decimaprimi notũ est. et hec cũ correlario suo proxim ꝓgressionis demõstrat.

¶ Omne perfectum est trinum.

¶ Ternarius totus est religione sacer et a Pythagoricis Magis et Sacerdotibꝰ olim in arcanis mirum in modum veneratus. et Aristoteles Pythagoricoꝝ symbolis insistens corporeã magnitudinẽ ipsumqꝫ vniuersum perfectũ astruit qꝛ ipsum trinũ sit immo vero trinũ est: qꝛ ipsum perfectũ est qđ prio Pythagoras cõperit in numeris: numerorũqꝫ mysteriis. hic ergo suscipit demonstrãdum omnẽ numerum perfectũ esse trigonum. Nam per tricesimãsecundam septimi quotcunqꝫ nũeri pariter pares cõnumerata vnitate coaceruati efficiunt numerũ proximo sequente pariter pare: vnitate minorẽ qui quidem proxime sequens pariter par per vicesimãnonam septimi est coaceruatorũ maximi duplus: quare totus coaceruatus est impar. at per sexagesimã septimi oĩs numerus perfectus gignitur ex coaceruatione vnitatis et pariter pariũ quoties coaceruatꝰ est primus qui vt dictũ est ꝑ vicesimãnonã septimi sola vnitate distat a proximo pariter pari: qui ad aggregatoꝝ maximũ duplus est. ergo maximus aggregatorũ subduplus paris numerũ aggregatoꝝ imparẽ proxime sequẽtis: in ipsum imparẽ ductus: per primã partem correlarij precedẽtis cõstituit numerũ triangularẽ. est igitur oĩs numerus perfectus triãgularis atqꝫ trigonus: qđ est propositũ. Et eius latus ꝑ precedẽtem ꝛ correlariũ prime huius erit ille impar ex omnibus coaceruatus.

¶ Omnis numerus por medio sui parte multiplicatus tanto minorẽ summã ꝓducit qꝫ omnes summe que in ipso sunt coaceruate: qꝫtum sua ipsius medietas.

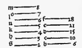
¶ Het ex analyticis numerorũ deprõpta est. et ex scđa parte correlarij superioris cõclusionis adiuuãte nona primi ꝛ cõi dignitate: vnitatẽ in quẽcunqꝫ numerũ ductã: ipsum ꝓducere: stati cognita esse põt.



1	3	6	10	15	21	28	36
1	2	3	4	5	6	7	8

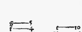
¶ Si sumantur triangulares ab vnitate: duos primos impares et sequẽtes duos pares atqꝫ ita vicissim duos et duos impares atqꝫ pares inueniri necesse est. 7

¶ Quia enĩ per correlariũ prime huiꝰ triãgulares creãtur ex nũeris ordine cõtinuo ab vnitate dispositis et vnitas primus est potẽtia triãgularis ꝛ potẽtia impar. addita igit numero sequẽti q est par cõstituet ꝑ correlariũ prime huius fm triangularẽ ꝛ per secundã septimi imparẽ. erunt ergo duo primi triãguli nũeris hoc pacto dispositis ĩpares. Sed ꝛ qꝛ tertius numerꝰ est ĩpar et cũ precedẽti triãgulo ꝑ idem correlariũ cõstituit triangulũ ꝛ p̄cedens mõstratus est ĩpar: ergo ꝑ tertiã septimi tertius triãgularis erit par. et qꝛ quartus ab vnitate nũerus est par q cum p̄cedẽti triãgulo pari ꝑ idem cõstituit quartum triangulum. ergo quartus triãgularis per primã septimi est par. erunt ergo duo sequentes pares. et iisdem rationibus mõstrentur duo sequẽtes esse impares ꝛ vicissim aliĩ duo sequẽtes pares sicqꝫ sine difficultate certum apparebit propositum.



¶ Si post vnitatem sumantur numeri triangulares: inter duos et duos disiunctim: erunt que inter numeros ab vnitate naturali serie: sumpte proportiones. 8

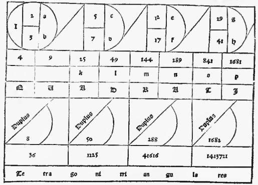
¶ Sit primus triãgularis post vnitatẽ a ꝛ b c d e f ordine ꝯsequẽtes sitqꝫ vnitas et g h k nũeri ab vnitate naturali serie ꝑcedẽtes: dico que ꝓportio g ad vnitatẽ eã esse b ad a: et q h ad g eã esse d ad c: ꝛ que k ad h eã esse f ad e. ꝛ ita ꝑcedẽdo in his disiũctim: in illis vero cõiunctĩ. nam ꝑ precedẽtem a est ĩpar b c pares: d e ĩpares: et f par. sumo enĩ quattuor pares ab vnitate q sint g k l m: et medij inter eos impares sint h n o. et qꝛ g q est binariꝰ est latus a q est ternariꝰ. ꝛ per correlariũ prime huiꝰ h latus b ꝛ k latus c et n latus d ꝛ l latus e et o latus f: ergo ꝑ quartã huius g in h facit altera pte longiorẽ duplũ a et h in k duplũ b ꝛ k ĩ n duplũ c et n in l duplũ d ꝛ l in o duplũ e: atqꝫ per eandẽ o in m duplũ f. qꝛ ergo g in h et k in h cõstituunt duplũ ad a et ad b. erit ergo per octauã secundi vt que ꝓportio k ad g ea sit dupli b ad duplũ a: sed ꝛ b ad a subduplus ad subduplũ per correlariũ decimequarte secũdi sicut eoꝝ duplorũ duplus ad duplum. ergo sicut k ad g ita b ad a. et per idẽ sicut l ad k ita d ad c. ꝛ sicut m ad l: ita f ad e. ꝛ cũ g k l m sint sumpti ab vnitate cõtinue pares: ergo ꝑ decimãoctauã septimi est ꝓportio b ad a vt g ad vnitatẽ ꝛ d ad c vt h ad g et f ad e vt k ad h: quod est propositum.



¶ Si tres continui triangulares statuantur: qui sub extremis continetur erit altera parte longior: cuius laterum maius erit illorum trium medius. 9

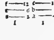
¶ Sint a b c tres continui triangulares ꝛ eorũ latera d e f: sitqꝫ g vno maior f. dico qđ fit ex a in c esse altera pte longiorẽ cuiꝰ maius latus erit b. nã qꝛ a b c sunt ꝯtinui trĩãgulares: ergo ꝑ correlariũ prĩe huius d e f sunt fm continuã seriẽ numeroꝝ sumpti. et qꝛ per quartã huius d in e cõstituit duplũ ad a ergo si d est par quẽadmodũ hic est: medietas d in e cõstituit a. et per idem medietas f in e cõstituit b. et medietas f in g cõstituit c. si aũt d esset impar numeraret a fm medietatẽ e: ꝛ f b fm medietatẽ e. et sic cõsequenter fm medietatẽ parium ĩpares numerarẽt triãgulares. ergo per octauã primi adiuuãte correlario decimequarte secũdi que ꝓportio f ad d: ea est b ad a. et q g ad e: ea est c ad b. ꝛ qꝛ a b c sunt continue sumpti triãgulares: ergo ꝑ correlariũ prime huius b superat a qꝫtum est e. sumo ergo h vno minorẽ b: manifestũ est h superare a qꝫtum est d. et quo abũdat c super b est f. ꝛ quia b ad a sicut f ad d ꝺriam h ad a. et sicut detractus ad detractũ: ita residuus ad residuũ. erit ergo vt sicut b ad a ita c ad h totus ad totũ: quod igit fit ex a in c ꝑ vicesimãquintã secũdi tñ est qꝫtum qđ fit ex h in b. at manifestũ est qđ fit ex h in b esse altera parte longiorẽ. igitur et qđ fit ex a in c. est altera pte longior: cuius maius laterũ est b illorum triangulorũ medius. et propositum.

10 ¶ Si sumãtur primi post vnitatem par et impár: et cõposito ex ipsis minor addatur: itemque ex his confecto minor adiciatur: erit vt cum primorũ primus sit par: sequẽtes sint impares. tertiorũ primus par et sequentes impares ac sic deinceps. duploque quadrati parium et quadrato extremi impariũ: tetragoni triãgulares terminẽtur.



¶ Sint a et b numeri primi post vnitatẽ par et impar binarius scz atque ternarius quod iuncti faciãt c cui addito a fiat d. item c et d cõponent e cui addatur c et fiat f atque e et f componant g et e addatur g et fiat h. dico primo a esse parẽ et b imparẽ et c d impares. item e parẽ f et g h impares. a enim esse parem et b imparem est hypothesis. et quia c cõponitur ex a et b: per secundã septimi c etiã est impar. et quia d constat ex a pari et c impari per eandẽ secundã d est impar. et quia e constat ex c d duobus imparibus e per quartã eiusdẽ erit par. et quia f constat ex c et e impari atque pari per secundã eiusdẽ f est impar et per eandẽ erũt g et h impares: quod intendebat. Secũdo dico duplũ quadrati a terminare tetragonicũ triangularem. terminare enim tetragonicũ triangularẽ est esse latus quadrati qui pariter est et triãgularis. Patet idem quia vnitas duplicata cõstituit a et a bis sumptus suum perficit quadratũ: duabus igitur vnitatibus a distat a suo quadrato et vnicum suscipit mediũ scz b: cuius differẽtia ad a est vnitas. et quia per septimã sexti quo abundat quadratus b super quadratũ a est quod fit ex vnitate in b et a simul. sed b et a simul sunt vno maius quadrato a qui duplus erat ad a. igitur quadratus b est vno maior duplo quadrati a. sed et quia duplũ quadrati a in quadratũ b cum sola vnitate distent, producit per diffinitionẽ altera parte longiorẽ quadratus a qui est medietas in quadratũ b per octauam secundi, producit illius altera parte lõgioris medietatẽ. ergo per quartã huius quadratũ a in quadratũ b producit triãgularem. et quia producitur ex ductu quadrati in quadratũ: ergo per decimãquartam sexti idem erit et tetragonicus. effectum est ergo quod dicebat. Tertio dico quadratũ d extremi impariũ terminare tetragonicũ triangularem. sumo enim quadratũ c qui sit k et quadratũ d qui sit l: dico k duplicatũ excedere vno l. nam quadratum c duplicatũ per decimãquintam primi est tanquam duplũ quadrati a et duplũ quadrati b. ex quod fit ex b in a quater et quia per eandẽ decimãquintam quadratũ d est quantum c in se et a in se et a in c bis: sed c in se est tãtum per eãdem quantum b in se et a in se et a in b bis. et a in c bis est tantum per nonã primi quantum a in se bis et a in b bis. ergo quod fit ex d in se est quantum quod fit ex b in se et quadruplũ quadrati a et quadruplum producti ex a in b. sed cum duplũ quadrati c sit monstratũ quantum duplum quadrati b et duplũ quadrati a et quadruplũ quod fit ex a in b: et ex secunda parte huius quadratũ b excedat vno duplum quadrati a. sit ergo vt duplum quadrati c cõtinens quadratũ b loco huius quod quadratũ d continet duplũ quadrati a ceteris omnibus cõsimilibus excedat vno quadratũ d. duplũ ergo quadrati c in quadratũ d per diffinitionẽ producit altera parte longiorem cuius longius latus excedit vno quadratũ d. illius ergo dupli dimidius qui est quadratus k in l quadratũ d producit illius altera parte longioris dimidium per octauam secundi qui per quartam huius est triangularis et cuius latus est l quadratus extremi imparium qui et idem per decimãquartam sexti est tetragonus. et hac ratione de sequentibus molire id quod propositũ est ostendere: et omnino constabit propositum.

¶ Si ab vnitate continue designentur parte altera logiores et quadrati: duo τ duo cō iuncti: triangulares omnes efficient. 11



¶ Designo ab vnitate a b c quadratos et ab vnitate altera parte lōgiores qui sint d e f: dico quoslibet duos primos quadratū et altera parte lōgiorem simul: cōstituere triāgularem. nā si fuerit prim⁹ quadratus q̄ est vnitas τ primus altera parte lōgior qui est binarius manifestū est illos simul additos p correlariū prime huius cōstituere triāgularē. q̄ si fuerit a scdus quadrat⁹ τ d primus ab vnitate alt'a pte lōgior sit per vicesimāsextā septimi quadratus a ɔstat ex īparibus ab vnitate scʒ ex vnitate τ prio īpari τ d est pmus par: quare si resoluat a erit accepti cōtinue numeri ab vnitate. p correlariū igitur pme hui⁹ ɔstituūt triāgularē. τ ita ostēde a et e cōstituere triāgularē resoluto a in suis īparibus p 26 septimi τ e in suis paribus p vicesimāsextā eiusdē. et ita de quibuslibet duobus hoc mō sumptis.

¶ Si sumantur triangulares et tetragoni: fuerintq̄ illi toti triangularium ab vnitate quoti isti tetragonorū post vnitatem: coniuncti facient numeros pentagonos. 12





¶ Nam si vnitati que est primus trigonus adiungas primū quadratū post vnitatē qui est quaternari⁹ fiet pētagonus post vnitatē habēs quinq̄ latera equalia. et si capis scdm trigonū ab vnitate habebit binariū in latere τ scdus tetragonus post vnitatē habet ternariū in latere. adiecto ergo latere quadrati fiet per correlariū prime hui⁹ triāgulus sequēs habens latus trium vnitatū et figura pētagona recipiens totidē in quolibet eius latere vnitates. et q: semper totus tetragonus post vnitatē habebit vno plus in latere q̄ trigonus totus ab vnitate: hac rōne de quibuslibet alijs ppositum efficere. τ q: latera illorū pentagonoꝝ equalia sunt lateribus tetragonorū datorum: hinc etiā fit vt illi pentagoni toti sint post vnitatē quoti τ tetragoni. ¶ Et ex hac τ vicesimasexta septimi cognoscit' qd̄ diu⁹ Seuerinus asserit boetius: 14 capite secundi sue institutiōis arithmetice: pētagonoꝝ generationē nasci ex numeris naturali serie ordinatis quādo cōtinue duo a monade duoꝝ semper in medio facta intermissione iungūtur. Nam per p̄sentem accepta vnitate que est primus trigonus τ quaternario tetragon⁹ duoꝝ in medio binariū scʒ atq̄ ternariū facta intermissione iunctis: fit scdus pētagonus duo in latere gerēs. At rursum duobus intermissis septenarius acceptus quinariū includit τ binarium. At quinarius impar per vicesimāsextam septimi additus tetragono quaternario: proximū cōstituit tetragonū τ binarius vnitati adiectus per correlariū prime proximū vnitati cōstituit trigonum. ergo p presentē vnitas 4 et 7 cōstituunt pentagonū. At rursus duobus omissis post septenariū accepto denario qui 7 includit sequentē imparē τ ternarium: qui septenarius quadrato prioris pentagoni additus p vicesimāsextam septimi succedētem constituit quadratū et ternarius trigono pentagoni adiectus propinquum trigonum. erit igitur per presentē numerus ex vnitate 4 7 et 10 constitutus pentagonus: τ ita de quibuslibet alijs argumentabere.

¶ Si parte altera longior cum toto post vnitatem triangulari coniungatur: compositus erit pentagonus post vnitatem totus. 13



¶ Sit a aliquotus ab vnitate altera parte longior vt scdus: cuius ideo minus latus erunt due vnitates: sitq̄ b triāgulus totus post vnitatē cui⁹ latus ideo erit ternarius τ equale maiori lateri altera parte longioris. adiungo ergo maius latus trigoni b maiori lateri altera parte longioris a: et fiet tetragonus sed τ illud quod restat dempto maiore latere b per secundam huius est triangulus minor descendendo ergo per precedentem ille cum quadrato ex altera parte longiore τ lōgiore latere trianguli cōstituto: erit pentagonus: quod est propositum.

¶ Quilibet pentagonorū post vnitatē cum toto triangulari ab vnitate: hexagonum post vnitatem simuli loco positū constituit: et huiusmodi tetragonicus dicatur. 14



¶ Unitas oīs numeri potestatē optinere dicit' cuius equalia latera designātur. hinc ipsa est primus triangulus primus tretragonus pentagonus hexagonus τ ita deinceps. et predictorū numerorum primus post ipsam est cuius latus fuerit binarius: τ scdus post ipsam cuius latus fuerit ternarius scdus vero ab vnitate cuius latus fuerit binarius. et dicitur hexagonus tetragonicus cuius latus est equale lateri medij tetragoni. dico ergo q̄ si capiatur aliquotus pētagonus post vnitatē vt a: qui verbi causa post vnitatē sit tertius et b totus triāgulus ab vnitate: dico a tum b cōstituere hexagonū post vnitatē totum pariterq̄ τ tetragonicū. nam per duodecimā huius quotus pētagonus fuerit post vnitatē ex toto post vnitatē tetragono constat et triāgulari ab vnitate toto. ergo equalis triāgularis qui est quē propō proponit ex opposito tetragoni latere appositus hexagonū constituet: cuius latus erit equale lateri medij tetragoni. et q: latus eius ē equale lateri medij tetragoni est τ equale lateri pentagoni quare τ hexagonus totus erit post vnitatē quotus et pētagonus. τ q: eius latus est equale lateri medij tetragoni est idē τ tetragonicus: qd̄ est propositū. Et hac et duodecima hui⁹ τ correlario pme cognoscē promptū est gnātionē hexagonoꝝ eo pacto q̄ docet Boeci⁹ 15 capite scdi arithmetices

¶ Ois tetragonus cū precedēte altera pte longiore: hexagonū tetragonicū ɔstituit. 15



¶ Primus enim altera parte longior post vnitatem est qui habet vnitatem minus latus τ secundus qui hʒ dualitatē et ita deinceps. τ precedēs tetragonū est cuius minus latus est vno minus latere tetragoni qui τ post vnitatē totus ē quotus τ altera parte lōgior ab vnitate. dico ergo quēcunq̄ tetragonū vt a cū precedēte altera parte longiore vt b cōstituere hexagonicū tetragonū. nā p quartā hui⁹ altera

parte lõgior b diuidit in duos triãgulares quoꝝ vterq totus est ab vnitate quotus pte altera lõgior post vnitatẽ: q2 latus illorũ triãgulorum equale sit minori lateri altera parte lõgioris. quare ⁊ vterq totus est ab vnitate quotus tetragonus a post vnitatẽ. vnus ergo illoꝝ trigonorũ per duodecimã hui⁹ cũ tetragono a cõstituit pentagonũ post vnitatẽ totũ: sed et per precedentẽ idem pẽtagonus cũ altero triãgulari qui est totus ab vnitate cõstituit hexagonũ tetragonicũ. a igitur cum b altera parte lõgiore precedẽte cõstituit hexagonũ tetragonicũ: quod erat demõstrandum ⁊ ꝓpositum.



16 ❡ Si disponant triangulares ab vnitate: tertius atq vno intermisso a priꝰ sumpto tertius: erit hexagonus.

❡ Nã per vndecimã huius dispositis ab vnitate pte altera lõgioribus et quadratis si duo ⁊ duo iũgãtur fient oẽs triãgulares. at cũ primus triãgularis post vnitatẽ fiat ex vnitate ⁊ pmo altera pte longiore: scd̃us triãgularis post vnitatẽ q est tertius ab vnitate fiet ex pmo tetragono post vnitate ⁊ pmo post vnitatẽ altera pte lõgiore per eandẽ vndecimã qui est tetragonũ precedẽs. ergo p precedentẽ tertius triãgularis ab vnitate ẽ hexagonꝰ: sed ⁊ eadẽ rõne q2 vno intermisso tertius semp a q̃drato et p̃cedente altera pte longiore p vndecimã huius nascit: ergo per p̃cedentẽ tertius semper erit hexagonus quod est propositum.



17 ❡ Si sex vnitates vni circũponantur: ita vt illarũ adinuicẽ ⁊ ad illam eadẽ sit distãtia hexagonum equiangulũ constituent.

❡ Nã quelibet due illaꝝ vnitatũ cum media vnitate triãgulum equilaterũ constituunt. fient ergo sex triãguli equilateri quos dico etiã esse adinuicẽ equiãgulos. nã cum illoꝝ vnitates abinuicẽ ⁊ a media distẽt vnitate: si vnitates vnius vnitatibꝰ cuiuslibet alterius applicent erunt supra se inuicẽ apposite et ãguli vnius ãgulos alterius nõ excedẽtes: quare sex ãguli hexãguli erunt equales. erit igitur talis hexagonus equiãgulus qd̃ intẽditur. et ita de tetragono equiãgulo ⁊ pẽtagono si placeret ostẽderet.



18 ❡ Latere proposito hexagonum equiangulũ constituere.

❡ Sit a vnitates dati lateris qbus vna plures applico: ita semp augẽdo donec tot sint ordines quot vnitates sunt in latere. itaq hoc mõ descẽdendo donec tot cõpleant ordines quot vnitates sunt in eodem latere. ⁊ q2 sunt tria latera equalia ascẽdẽdo et tria similia descẽdendo pz creatũ esse hexagonũ quẽ dico equiãgulum. nã medius ordinũ semp per vicesimãtertiã septimi ẽ impar q totus sit a nũero lateris quotus nũerus lateris ab vnitate. habet igit ille maximus numerus vnum mediũ. ⁊ si signas extremitates sex laterum per b c d e f g erit illa media vnitas media ordinis f c: ⁊ b: et ordinis d g. q2 equales sunt et eã cõicant. distat ergo equalit ab f ⁊ c et ab e ⁊ b et ab d ⁊ g. quare sex triãguli: scz media vnitas f e: media vnitas e d: media vnitas d c: media vnitas c b: et media vnitas b g: ⁊ media vnitas g f: adinuicẽ eqlateri sunt et vt in p̃cedẽti equiãguli. ẽ igit hexagonꝰ b c d e f g equiãgulꝰ: qd̃ ẽ ꝓpositũ



19 ❡ Si cuilibet hexagono equiangulo totus senarij multiplex addatur quotus ipse est ab vnitate: similem hexagonũ prouenire necesse est.

❡ Si p̃mo hexagono q est vnitas senarius circũponat per penultimã fiet sequẽs hexagonus equiangulus. nã habẽs duo in latere q si coꝝ interualis que etiã sunt sex: sex apterũ vnitates in eadẽ distantia: atq ipsis sex vnitatibꝰ alie sex angulariꝰ: fiet sequẽs hexagonus equiãgulus habens ternariũ in latere. ⁊ vt precedẽs hexagonus secũdus erat ab vnitate ita acceptus est totus senari multiplex: scilz duplus ad senariũ qui est duodenarius: cui si rursum circũponas tripliũ senarij: scz duodecĩ vnitates in duodecĩ interuallis et sex ad sex ãgulares vnitates efficis sequẽtem hexagonũ equiãgulum qui vt in precedẽte probaret habet quaternariũ suũ latus. et q2 semp iteruallo crescit in senario tot ãgulis semp manẽtibus apposito sequẽti senarij m̃tiplici semp efficies hexangulũ equiãgulũ z eadem rõne sequẽtem: quod intendit propositio.

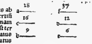


20 ❡ Si ordinentur ab vnitate triangulares et singuli secundũ senarium multiplicẽtur: producti addita vnitate erunt hexagoni equianguli.

❡ Si enim vnitatẽ que primus triãgularis est senario multiplices: secũdus hexagonus nascitur: qui addita vnitate circũclusa cognoscit ⁊ equiãgulus. et q2 per precedẽtem quilibet hexagonus tot addit senarios super p̃cedẽtem quotus ipse p̃cedẽs fuerit ab vnitate. ⁊ q̃libet triãgularis p correlariũ p̃me tot hz vnitates supra p̃cedẽtem quotus ipse fuerit ab vnitate. ergo si scd̃s triãgularis q ideo hz duas vnitates supra primũ multiplicet p sex addet tot senarios supra p̃cedẽtem hexagonũ qui fuit scd̃us: quotus ipse scd̃us hexagonꝰ fuit ab vnitate. ergo p p̃cedẽtem erit sequẽs hexagonꝰ. ⁊ ita quoq̃ tertio triãgulari q addit tres vnitates supra scd̃z p sex m̃tiplicato: ⁊ quolibet alio: addes ex multiplicatiõe tot senarios quotus ⁊ triãgularis ⁊ precedẽs hexagonus fuerit ab vnitate: sicq p precedẽtem semp concludes propositum.

21 ❡ Omnis hexagonus equiangulus tanto abundat super hexagonum tetragonicum simili post vnitatẽ loco sumptũ: q̃tus est tetragonus ab vnitate similiter dictus

❡ Sit exẽpli cã a quartus ab vnitate hexagonꝰ tetragonicꝰ q ⁊ tertius ẽ post vnitatẽ: sitq b totus ab vnitate tetragonus id est tertius: ⁊ quartus tetragonus c ⁊ medius altera parte lõgior d. dico tertiũ hexagonũ equiangulũ post vnitatẽ tantũ distare ab a q̃tus est b tertius ab vnitate tetragonus. nam per decimãquintã huius c et d cõponunt a: sed ⁊ q2 differẽtia b ad d per vicesimãquartam sexti est ternarius latus b: ⁊ differẽtia c ad d est quaternariꝰ latus c. erũt ergo p secundã primi b ⁊ c simul maius vno q̃ duplum d. capio c totum ab vnitate triangularem quotus est b tetragonoꝝ: quia minus latus



altera parte longioris d est latus b: quodquidē idem est latus c. ergo per quartā huius d erit duplus c: sed a b c mōstrata sunt vno maius duplo d. sunt ergo b c vno maius q̄druplo c: ergo b c d simul sunt vno maius sexcuplo c. at per p̄cedentē c sexies sumptus addita vnitate tertiū post vnitatē creat hexagonum equiāgulum qui sit f. constat ergo f ex b c et d: sed a solū constat ex c d vt ostensum est. abundat ergo f hexagonus equiangulus ab a hexagono tetragonico toto post vnitatē q̄ntum est b totus ab vnitate tetragonus: qđ est propositū. ℂ Animaduerte quēadmodum diuus mōstrat seuerinus heptagonos continue fieri ex hexagonis et inferioribus trigonis duobus equis iferioribus eminus adiectis trigonis. quod et idem euenit si dispositis naturalib' numeris: extremi cōtinue quattuor in medio relictis iungātur. vt secūdus heptagon' fit ex senario scđo hexagono et vno: p̄mo trigono emin' equali adiecto trigono. qui idē fit ex vno et senario quattuor in medio p̄termissis numeris: et tertius heptagonus fit ex 15 tertio hexagono et ternario scđo trigono e regiōe adiecto equali trigono hexagoni qui idē fit ex vno senario et vndenario. et hoc pacto in figuratione et collectione suorū numerorū in ceteris est procedendum.



ℂ Supra datum numerum octogonum equilaterum constituere. 26

ℂ Sit a datus nūerus supra quē iubemur octogonū equilaterū cōstituere. p̄cedo ei apponēdo ordines vno semper se excedētes donec totidē sint quot sunt vnitates in latere: eruntq; facta tria latera equalia et maximo ordini addo ordines equales quousq; tot sint quot sunt vnitates in latere eruntq; facta quinq; latera equalia. deinde ab vltimo ordine p̄cedendo appono ordines cōtinue vnitate minores donec tot sint quot in dato latere vnitates fientq; sic descēdendo tria latera p̄dictis equalia eruntq; simul octo equalia latera atq; octogonus equilaterus cōstitutus: qđ erat faciendū. ℂ Alia apud diuū seuerinū octogonorū inueniēdorum ratio modusq; est vt cōtinue ex toto heptagono et sub se trigono surgant. et idē fiunt si ex dispositis naturalib' numeris cōtinue in medio quinq; relictis: extremi iungātur. vt si 7 scđo heptagono iungas vnum primū trigonū surgit octonarius et scđus octogonus. qui idē fit ex vno et septē quinq; numeris binario ternario quaternario quinario senario īterstitibus: dimissis. et si 18 tertio heptagono iungas ternariū: secundū trigonū: fiet 21 tertius octogonus. qui idem colligitur ex 1. 7/13/ et hoc pacto in reliquis est procedendum



ℂ Si cuilibet hexangulo equiangulo post vnitatē: totus tetragonus ab vnitate cum sequēte altera parte lōgiore iungatur, p̄ueniet octogon' post vnitatē sibi loco sumpt'. 23

ℂ Sit quilibet hexagonus equiāgulus cuius latus sit a et maximus ordinū eius sit b qui addat supra numerū c. q̄m enim hexagonus datus habet triāgulorū in media vnitate cōicantium latera equalia: hinc ordinis b maximi: linea minor est vno: duplo lateris a ergo c minor vno q̄ a. addo ergo ad b ordines equales secundū c. et q̄r ab a ad b fiunt tria latera equalia fient rursus ab b cum additis ordinib' duo alia equalia quibus addo relictos hexagoni post b fientq; rursus tria alia reliquis equalia eritq; formatus octogonus. et q̄r per nonā primi c in b fm ordines additos est tantum q̄ntum c in se et in a. at qđ in se facit est tetragonus: et quod in a facit est altera parte lōgior. cum c et a sola vnitate distent: et tetragonus ille totus sit ab vnitate quotus octogonus formatus post vnitatem. nam hexagonus vno maius latus habet latere tetragoni: et altera parte longior sequēs tetragonū. cōstat ergo q̄ hexāgulo equiāgulo assignato post vnitatē: additus totus ab vnitate tetragonus cū sequēte altera p̄te lōgiore cōstituit octogonū qui cū equalia hexagono latera hēat: totus erit post vnitatē octogonus: et p̄positū

ℂ Formarū sex equilaterarū qualibet fm vnitatū dispōnem figuraliter cōstituere. 24

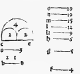
ℂ Si enim triāgulos tetragonos pētagonos hexagonos tetragonicos hexāgulos equiāgulos et octogonos secundū vnitatū dispōnem figuraliter cōstituere desideras: ex prima huius trigonos figurare disce. ex quīta tetragonos: ex duodecima pētagonos: ex decimaquarta hexagonos tetragonicos: et ex decimaseptima et decimaoctaua hexagonos equiangulos: et ex vicesimasecunda octogonos. sicq; per vsum habebis propositum.



ℂ Latere dato figurarum p̄eassignatarū cuiuslibet summā reperire. 25

ℂ Sit latus datū a qui ponat esse par et medietas a sit b: sitq; c minor vno a et d eodē vno maior. additoq; c ad d fiat e. et iterū c addito ad e fiat f. et sil'r c addito ad f fiat g: ducaturq; b in d et sequentes et p̄ueniant h k l m. q̄r enī a in d cōstituit altera p̄te longiorē cuius triāgularis lateris a est medietas. ergo p̄ quartā huius b medietas a in d p̄ducit triāgularē lateris a: sicq; h ostēdit summā triāgularis lateris dati. et q̄r c d simul cōstituūt e qui p̄ secundā primi est duplus a. ergo b a e sunt cōtinue p̄portionales qđ ergo fit ex b in e per vicesimāsextā secundi est quadratū a. et cū id sit k ostendet k summā tetragoni lateris dati a. et q̄r qđ fit ex b in f per nonā primi tm̄ est q̄ntum qđ ex b in e et in c. et enim c in a cōstituat altera parte longiorē cuius medietas est triāgulus c per quartā huius. ergo b medietas a in c p̄ducit triangularē cuius latus est c. sed et b in e p̄ducit tetragonū a qui totus est post vnitatē quotus triangularis c ab vnitate. ergo per duodecimā huius b in f p̄ducit totum post vnitatē pentagonū. at ille est pentagonus a et productus est l. ostendet igitur l summam pentagoni lateris a. et q̄r quod fit ex b in g est tātum q̄ntum quod fit ex b in c et in f. et dictum est ex b in c fieri triāgularem totum ab vnitate quotus est post vnitatē pentagonus ex b in f factus. ergo per decimāquartā huius b in g constituet hexagonum tetragonicū totum post vnitatē quotus et post vnitatē est pentagonus at hexagonus ille erit hexagon' a et p̄ductus m monstrat itaq; m summam hexagoni a: lateris assignati. Duco item c in se et p̄ueniat n qui erit totus ab vnitate tetragonus quotus hexagonus tetragonicus m est post vnitatē. addo ergo m et n simul et prouenīat o qui per vicesimā primam erit hexagonus equiangulus a. nam totus post vnitatē quotus hexagonus m. duco item c in a: et p̄ueniat p qui erit altera parte longior

sequena tetragonum c sc3 n. additis ergo iterum n et p tetragono sc3 et sequẽte altera parte longiore hexãgulo equiãgulo o p vicesimãtertiã huius pueniet octogon⁹ totus post vnitatẽ quotus post vnitatẽ erat hexãgulus equiãgulus o. quare octogonus prouenies qui sit q erit octogon⁹ lateris dati a atq summã petitã ostendẽs. Sed esto rursus a latus datũ numerus ipar et b c circũpositi pares b minor e maior et medietas b sit d et medietas c sit e: per secundã primi d et e simul cõstituent a. duco d super h et fiat f: et super e fiat g: et duco a in e et pueniat h qui ca ratione qua superius erit triãgularis a. et duco a in se et proueniat k qui erit eius tetragonus et a in f et pueniat l: qui ea ratione qua prius erit pentagonus a et duco a in g et proueniat m qui etiã per decimãquartam huius erit hexagonus tetragonicus lateris dati a sed et hexagonũ equiãgulum et octogonũ a quere vt paulo ante monstratũ est.



16 ℭ Omnis pyramis cui⁹ basis triãgula est: quattuor triãgularibus et equalib⁹ ptinet.

ℭ Nã tres a tribus laterib⁹ basis triãgulares erigũtur q simul applicãtur atq cõueniunt et basis est quartus triãgularis. Et qm duo ex duo latus habent cõmune: erunt omnes inter se equilateri: quare et equales. quod igitur asseritur per diffinitionẽ ratum est.

17 ℭ Si triãgulares ab vnitate in altum sibi continue adaptentur: prouenient omnes ab vnitate pyramides: et cuiuslibet basis erit triãgulorum suorũ maximus.

ℭ Sint a b c d e f ab f vsq vnitatẽ sc3 quotlibet sumpti triãgulares cõtinue vno minores q sibi inuicẽ eo ordine aptẽtur applicẽturq: ita vt b supponat a: et c supponat b: et d ipsi c: et e ipsi d: et f ipsi e dico pyramides ab vnitate esse sumptas oẽs et cuiuslibet basim suoꝝ triãguloꝝ esse maximũ. cum enĩ numeri l k in altũ constituti in vnitatẽ conueniãt per diffinitionẽ constituũt pyramidẽ: erũtq p correlariũ p̃me huius oẽs ab vnitate sumpti triãgulares. si itaq vnitatẽ consideras eadẽ est ex prima potentia pyramis. si primũ triãgularẽ cuius latus est binari⁹ cũ ipsi suprapostia coaptataq vnitate appositi appareãt equales simulq cõuenientes triãgulares: erit cõstituta scda pyramis cui⁹ latus erit secundus triãgularis. et cũ sint in altũ continue accepti triãgulares erit et tertia pyramis cõstituta cui⁹ latus erit tertius triãgularis: et quarta cuius quartus triãgularis erit latus atq ita deinceps. sed q cuiuslibet basis sit suoꝝ triangulariũ maximus hoc id est q p precedentẽ basis ẽ triãgularis cuilibet triangulariũ laterum equalis. si itaq latus sit quintus triãgulus p correlariũ p̃me huius ex oĩbus precedẽtibus triãgulis ↄstitutus ita et basis quintus erit triãgulus et ex oĩbus inferiorib⁹ cõstitutus qui erit illius pyramidis maximus: et ita de quacũq altera sicq cõstare potest propositũ

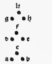


18 ℭ Si cuilibet numero equaliũ laterum oẽs ab vnitate sibi similes in altũ apponãtur: qui cõponetur erit pyramis basemq ipsius eãdem esse cõueniet. si vero citra vnitatẽ huiusmodi eiusdẽ generis formariũ in altum suppositio erectioq deficiat: quot ab vnitate illius generis relicte fuerint: toties curta pyramis nascetur.

ℭ Hec docet tetragonice basis/pentagone/hexagone/heptagone/octogone/ennagone/decagone: et quotquot angulo volueris eodẽ ingenio quo et precedẽs de triãgularibus pyramides formare. nam si hoc pacto tetragoni ab aliquo dato ad vnitatẽ vsq suppositi aptentur: oĩa latera (que p correlariũ p̃me huius erũt triãgulares numeri ab vnitate cõtinue sumpti sunt) in vnũ verticẽ concurrẽt totãq pyramidẽ ↄstituent cui⁹ basis erit datus tetragon⁹ sup cuius latera sunt erecta latera pyramidis in vnũ cacumen conueniẽtia imo oẽs tetragonice pyramides infra illã essent formate. et ita si pẽtagoni hexagoni et sequẽtes hunc in modũ aptẽtur pẽtagonas hexagonas octogonas ẽnagonas: reliquasq oẽs formabis pyramidas Scda pars statĩ nota est nã si detur quotuscũq triãgularis vt sextus ab vnitate cui supponãtur mõ ãtedicto p ordinẽ quĩtus quart⁹ tertius et scdus. at desit vnitas q̃uis latera illi⁹ simul tendãt non tñ conueniũt: ideo figura illa p diffinitionẽ erit curta pyramis. q si quĩtus quartus et tertius soli suprapositi in altũ fuissent: defuissẽtq duo scdus et vnitas her biscurta pyramis diceret q si omissi fuissent tres diceretur tricurta. et ita quotquot omitterẽtur toties curta diceret. et ita de curtis pyramidibus que a quadratis pentagonis hexagonis et sequẽtibus figuris nascũtur sentiendũ est. est itaq notum quod proponitur.

19 ℭ Si due pyramides quarum bases sunt triãgulares proximi coniungãtur: efficietur pyramis cuius basis erit tetragonus maior triãgularium equilaterus.

ℭ Nã quelibet earũ erit cõposita ex oĩbus triãgularibus q sunt a triãgulari basis sue vsq ad vnitatẽ at basis minoris p̃ximus est triãgularis post basem maioris. cõiuncti igit simul p quintã hui⁹ faciũt tetragonũ ex scdus vnius et scdus alteri⁹ sequentẽ tetragonũ. et sic eousq donec extrema vnitas minoris cũ penultimo alterius triãgulari primũ post vnitatẽ cõficiat tetragonũ. vnitas igitur si apponat oẽs ad ipsõsq tetragonos suprapositos habebim⁹ ab illo sc3 tetragono cui⁹ latus est equale lateri triãgularis basis maioris pyramidis. at per p̃missam ex oĩb⁹ ab vnitate tetragonis cõponitur pyramis cuius basis est quadrãgula et coniunctorũ vltimus tetragonus. effectũ est igitur qd proponebat.



20 ℭ Si quotlibet triãgulares equales in altũ cõponãtur: fiet ex eis numerus serratilis.

ℭ Nam q: equales erunt poterũt directe cõtinue in altum latera vnius super latera alterius aptari applicariq: vt latus d e supra latus a b et d f: et f e supra latera a c et c b: et latus g h supra latus d e: et latera g k et k h supra latera d f et f e: et ita de consequentibus vsq ad vltimũ. et quoniã omniũ latera sunt equalia: erit vt supra posita directe latera que supremũ locum optinent extremis equalia sint et equidistãtia. patet itaq per diffinitionẽ factum esse serratilẽ quod proponebatur.



¶ Omnis serratilis pyramide sue basis vno altior: addit super eam: pyramidē cuius basis tetragona est: basi alterius equilatera. 31

¶ Nam dēpta triangula pyramide: ita videlicet vt basis in basi tollatur et de secūdo equalium triangulorū secundus pyramidis detrahat̄ et de tertio tertius: sicq̧ deinceps. q: serratilis vno altior pyramide sue basis positus est de penultimo triāgularīū equaliū auferet̄ suprema vnitas atq̧ pyramidis vertex: sicq̧ totus vltimus triāgularis serratilis integer relinq̄tur. at q: in basi serratilis fuit ablata basis triāgule pyramidis. ideo per secundā huius: secundi triāgularis relictū est latus ꝛ in omnibus superiorib⁹ similiter qui q̄m tot sunt quot in illo latere vnitates: constat latus ipsum cū sequētium lateribus summā quadrati ꝯficere. preterea q: tertij triangularis serratilis remanet latus suū ꝛ minor sequēs et in sequētibus similiter: erit vt illa sint sequētis quadrati latera. et hoc pacto ad vnitatē vsq̧ quadratoꝝ numerus excrescit. erit ergo vt in supremo triangulari residua sit vnitas et que est primus tetragonus. ergo per vicesimāoctauam huius constat relictam esse tetragonā pyramidē. et q: latus basis eiusdē est latus triangulariū equalium et latus basis piramidis triāgule ablate idē: constat pyramidē relictam esse pyramidi basis serratilis equilaterā atq̧ ipsum serratilē eam super pyramidem basis sue addere: quod est propositum.

¶ Omnis serratilis pyramide sue basis duobus altior: eidē triplus esse probat̄ 32

¶ Substraho enī ab ipso serratili extremū triangulareū relinquet̄q̧ serratilis vno altior piramide: q̄ per precedentē in duas secabilis est piramidas: quarū vna est triangula pyramis basis serratilis ꝛ altera tetragonica cuius basis tetragona est et basi alterius eq̄latera. sed ꝛ hec eadē tetragonica pyramis per vicesimānonam huius in duas rursus secabilis est triāgulas pyramides: quarū vna triāgule priori est equalis et altera ea minor q̄ntum est basis triāgule prioris. addito igitur prius dēpto triāgulari eidē basi prioris triāgule pyramidis equali ad minorē: illa fiet alteri equalis. sic fiēt tres equales triangule pyramides totum serratilem constituentes. constat itaq̧ totum huiusmodi serratilem pyramidi sue basis esse triplum: quod est propositum.

¶ Latere basis triāgularis dato: triāgule pyramidis sup̄ eam ꝯstitute summā repire. 33

¶ Reperiatur triāgularis lateris dati per sextā huius: in quē latus ipsum ducatur ꝛ habebimus serratilē eque altū pyramidi cui addice duos equales triāgulares ꝓuenietq̧ serratilis duob⁹ pyramide sue basis altior cuius tertiā partem accipe ꝛ p̄ precedētē habes pyramidis sup̄ latus ꝯstitute summā atq̧ q̄d ex triāgulari lateris dati vna cū oībus suis inferiorib⁹ triāgularib⁹ coacervat̄: q̄d ē ꝓpositū.

¶ Pyramidis totius summā reperire: cuius basis tetragona: eiusdemq̧ basis latus datum fuerit. 34

¶ Ut precedēs docuit dato triāgularis latere q̄d ex ipso ꝛ oībus sub eo cōtentis coacervat̄ inuenire ita quoq̧ et p̄sens nos instruit dato tetragoni latere q̄d ex ipso et omnibus sub eo ꝯtentis tetragonis coacervat̄ reperire. hoc enī est tetragone pyramidis summā reperire quod ostēditur. nam dato latere quero per sextā huius eius triāgularem in quē vt in precedēti factū est ducu latus propositū et prouenit serratilis eque atq̧ eius pyramis altus cui addo vnū consimilē triāgulorum et ꝓueniet serratilis vno pyramide sue basis altior. detracta igitur p̄ precedentē inuenta basis pyramide: per tricesimā primā huius relinquetur tetragona pyramis cuiusquidē basis tetragona est atq̧ triangulari equilatera que scʒ est summa petita et propositum.



¶ Si duo serratiles quorum bases triāgulares proximi existant: et quorum altitudo vna: et lateri maioris equa fuerit: coniungantur: efficietur cubus. 35

¶ Nam bases in ipsis equaliter scʒ secūdum numerū lateris maioris serratilis sunt multiplicate ꝛ basis vnius et basis alterius cōiuncte per quintā huius tetragonū efficiūt cuius latus lateri maioris est equale ꝛ secūdus triāgulus vnius secundo alterius cōiunctus per eandē tetragonū consimilē. ꝛ ita cōsequenter vt tot tetragoni equales superponātur sibiq̧ inuicē aptētur quot in latere sunt vnitates at cum ex illis figura sit consticuta basim quadrangulā habens in longum latum et altum equaliter distensa per diffinitionem concluditur esse cubus.

¶ Si cuilibet cubo adiungatur basis sua et triāgularis basi sue equilaterus: efficietur triplus sue pyramidi. 36

¶ Sumo duos triāgulares proximos quorū maior sit equilaterus tetragono cubi assignati et constituo per tricesimā huius super eos serratiles quorū altitudo sit equalis lateri basis maioris qui duo serratiles cōiuncti per p̄cedentē equabūtur cubo assignato. ꝛ q: maior illoꝝ serratiliū est eq̄ altus sue pyramidi: duplo ergo sue basis sibi addito per tricesimāsecundā hui⁹ fiet pyramidi sue basis triplus. at q: alter serratilis est alteri eque altus: erit vno altior sua pyramide. basi igitur ipsi semel addita fiet eidē sue pyramidi triplus. at basis sua cum basi alterius per quintā huius facit tetragonū cubi: quare si predicto cubo addatur basis sua cū basi maioris serratilis que est triāgularis basi sue equilaterus: efficietur numerus piramidi sue triplus: q̄d erat demonstrandū. ¶ Sunt preterea colūne que vt serratiles per tricesimā huius facile formabūtur et quarū summa ducendo basim in costā cognoscitur que q: facilia sūt autor omisit. sunt etiā numeri circulares qui propter semp̄ principij reiteratione formātur. et eadē ratione sphere sphericiq̧ cubi vt vigintiquinq̧ et trigintasex qui a radicibus

quinaria scz & senaria nascitur numeri circulares dicuntur & centum viginti quinque: & ter ducenta decem & sex sphere sphericique cubi noiantur qui a radicibus quinaria & senaria in suos circulares quadratos ductis procreantur. Sed quia hi numeri a paucis & constitutis numeris nascitur quinario scz et senario & demonstrationis difficultatem non requirant: aut illem cum ceteris quadratis & cubis normam observent: horum ampliorem determinationem autor non ab re omisisse videtur.

¶ Octaui elementorum Arithmetices Jordani finis.

c Qualitas est inequalitatis pricipium. Inequalitatis quinque sunt species: aut eni maior terminorum continet minorem aliquotiens vt nichil supfluat: et dicitur multiplex proportio. aut semel tm & eius aliquam partem: et supparticularis appellatur. aut semel & eius aliquot partes: et dicitur suppartiens. aut pluries & eius aliquam partem: et multiplex supparticularis vocatur. aut pluries & eius aliquot partes: et multiplex suppartiens noiatur. ¶ Minoris quoque ad maiorem habitudo totidem species cotinet: que inter se sicut priores scdm denoiantium diuersitatem variantur. ¶ Scdm partem aliqd multiplicare: est totam illius sumere partem: quota fuerit que multiplicat. ¶ Quodcunque aliud multiplicet: illud pduci dicimus qd ita se habet ad multiplicatum: sicut multiplicans ad vnu. diuidi dicitur aliqd per aliud: cum illud sumitur diuidens qd per idem multiplicatum summam diuisi restituat.

1 ¶ Inequalium numerorum maioris ad minorem ea est: que partis ab ipo minore denominate: ad partem a maiore dictam pportio.



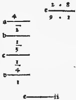
¶ Sint a & b numeri inequales: a maior/ et b minor. sintque d e partes ab ipis denoiate d scz denoiata ab b et e denomiata ab a. dico eandem pportionem ee a ad b et d ad e. pono eni vnu inter a et b qd sit c: & vnum inter d et e qd sit f. et qa que pportio a ad vnum ea e vnius ad partem ab a denoiatam: at ea est pportio f ad e. et que pportio c vnius ad b: ea est partis denoiate ab b ad vnum. at ea est d ad f. igitur per vicesimamseptimam septimi & equam proportionalitatem indirectam que pportio a ad b ea est d ad e: partis scz a minore denoiate/ ad partem a maiore denoiatam. quod est propositum.

2 ¶ Partes quotlibet in partes equales redigere.



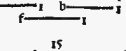
¶ Sint partes date a/b c: et numeri eas denoiantes d/e f: et ppositu sit reducere a b c in ptes eiusde denoiationis atque equales. sumo per vicesimamquintam tertii minimum nuerum que numerant d e f: qui sit g numerentque ipm scdm h/k l: et sit m pars denoiata ab g. erit eni per precedentem vt g ad d ita a ad m. at d nuerat g scdm h: igitur & m numerabit a scdm h. et per eandem vt g ad e: ita b ad m. e aut numerat g scdm k igitur & m numerabit b scdm k. itidemque m numerabit c scdm l per idem. eruntque reducte partes ille in ptes equales scz a in partes dictas ab g scdm h/ et b in easdem scdm k/ et c in easdem partes ab g dictas scdm l. at si a b c singule non sint pars: sed b sit partes & c partes idem eueniet. eruntque partes dicte ab g scdm h k l. & ducendo a in h pueniut partes a dicte ab g. et ducendo b in k pueniunt partes b ab eode nuero dicte et ducendo c in l pueniut reducte partes c dicte ab g. quas si vna colligis collectum ostendit summam partium a b c ad eandem denoiationem scz g reductarum.

3 ¶ Numerum cum parte vel partibus datum: in partes similes reducere.



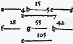
¶ Sit a numerus: & b/ c d partes date: et iubeatur primo a & b in partes siles reducere. duco numerum denoiantem partem b in a. et qa b est pars vnius & vnum pars totius a: denoiata ab a: ergo p vicesimamtertiam primi b est pars a denoiata a nuero qui fit ex ductu denoiantium in se scz denoiantis b: in a denominantem vnius a: partis scz a. duco ergo b in a & pducetur numerus denoians illam partem: & p diffinitionem multiplicans a scdm illam partem. capio ergo siles illi parti scdm pductum numerum qui erit oes siles partes a cui addo partem b & sit aggregatus e factoque apparebit propositum. Si si iubeantur a numerum et partes b c & d in consiles partes reducere: reduco pmo p precedentem b c & a in consiles ptes. deinde vt prius duco numerum denoiantem in a et pueniet nuerus denoians illam partem quem vt prius compleo & cui addo nuerum partium ad eandem denoiationem reductarum: et efficitur ppositum.

4 ¶ Quod fit ex ductu duarum partium vnius in aliam: e pars denoiata ab numero qui fit ex ductu duorum numerorum vnius in alium illas partes denoiantium.

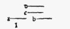


¶ Sint a & b due partes: & nueri eas denoiantes sint c & d: & ex c in d fiat e: et pars denoiata ab e sit f. dico f esse partem pductam ex a in b. erit eni ex diffinitione vt vnum ad c: ita d ad e. sed & vt vnum ad c ita a ad vnum. ergo vt a ad vnum: ita d ad e. sed p primam huius vt d ad e: ita f ad b. at p diffinitionem vt a ad vnum: ita pductum ex a in b ad b. at f ita se habet ad b. est igitur f p diffinitionem qd fit ex a in b. quod est propositum.

5 ¶ Si plura quotlibet in aliqd ducantur: tm pducitur quantum si qdlibet eorum ducatur in illd.

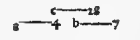


¶ Hec decime primi similis est sed color. sit nuerus a e collectus ex a b c q multiplicet d siue d sit nuerus siue pars vel ptes & pueniat e. et ex ductu a in d fiat f/ et b in d fiat g/ et c in d fiat h. dico f g h simul tm ee quantum e. nam ex diffinitione erit vnum ad a/ et ad b et ad c: tanquam d ad f/ et ad g & ad h. ergo p vicesimamtertiam septimi vnum ad a b & c: sicut d ad f g & h. at p diffinitionem sicut vnum ad a b & c ita d ad e. sunt igitur f g & h simul quantum e. quod est propositum



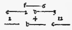
¶Si duorum quodlibet in reliquum ducatur: que producentur equa esse necesse est. 6

¶Hec fere est octaua primi sed paulo cõior quia etiã ad minutias/fractionesque se extendat. vt si a numerus pars vel partes multiplicet b numerum partem vel partes et proueniat c: et b multiplicet a et proueniat d. dico c et d esse equalia. nã ex diffinitiõe erit c ad b sicut a ad vnũ: ergo pmutatim c ad a sicut b ad vnum. ergo ex conuersiõe diffinitiõis b in a producit c. est igitur d quod fit ex b in a equũ c. quod erat demõstrandũ.



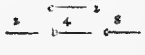
¶Producti ex duobus erit ad vtrũque proportio a reliquo denoiata. quod si eius ad alterũ fuerit pportio a reliquo dicta: idem ex ductu alterius in alterum producetur. 7

¶Ex duobus nũeris a in b producatur c: dico proportiõem c ad a eẽ denoiatam ab b: et proportiõem c ad b esse denoiatam ab a. nam per pcedentẽ ex a in b fit c: et ex b in a fit etiã c. et per diffinitiõem ea ẽ pportio b ad vnũ: que c ad a. at pportio b ad vnũ denoiatur ab b: igitur et pportio c ad a denoiabitur ab b. et consimiliter quia ex a in b fit c: per diffinitiõem que pportio a ad vnũ: ea est c ad b. at pportio a ad vnũ denoiatur ab a: igitur pportio c ad b denoiabitur ab a. quod est propositum. Cõuersum consimili conuerso modo probabitur. Et ex hac ad quelibet numerum quẽlibet multiplicem demõstrare possumus. capiẽdo totum numerum ab vnitate quotus numerus multiplex ad nũerũ sit petitus et ducẽdo numerum ab vnitate totum acceptũ in nũerum assignatũ. et per presentem totus pueniet ad numerũ assignatũ multiplex.



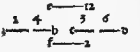
¶Ois pportio ex duabus cõposita: ex ductu vnius earum in reliquam producitur. 8

¶Ducere pportiõem aliquã in aliam: est ducere denoiationẽ vnius in denoiatiõem alterius. hic duas pportiões aliquã cõpositã producere: est denoiatiões illarum duarum pportionũ denoiatiõem cõposite producere. Esto quod pportio c ad a cõposita ex pportiõibus c ad b et b ad a. dico pportiõez c ad a produci ex ductu pportiõis c ad b: in pportiõez b ad a. capio enĩ d denoiantẽ pportiõis c ad b et e denoiantẽ pportiõis b ad a et f denoiantẽ totius c ad a. quia enĩ pportio c ad a denoiatur ab f: ergo per scdam ptem pcedẽtis f in a facit c et per eãdẽ e in a facit b. ergo per septimam scdi sicut c ad b ita f ad e: sed d est denoians pportiõem c ad b per hypothesim. ergo per scdam partem pcedẽtis d in e producit f denoians scz vnius illarum proportionũ in denoiatiõez alterius producit totius denoiatiõem. quod est propositum.



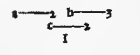
¶Trium cõtinue proportiõalium quod fit ex primo in vltimũ equũ est ei: quod ex medio in se ducto producitur. 9

¶Hec fere in vicesimasexta secũdi mõstrata est: nisi quod hec paulo latior est/atque hic alio demõstrandi modo innitimur. Sint ergo a b c tria cõtinue proportiõalia/atque ex b in se fiat d: et sit e denoians pportionis b ad a. dico equũ esse quod fit ex a in c: et b in se. nã quia e denoiat proportiõem b ad a: etiã denoiabit proportionem c ad b. ergo per scdam ptem penultime e in b producit c. ergo per octauam secũdi quod pportio d ad c ea est b ad e: sed et per eãdẽ scdam ptẽ penultime a in e facit b. ergo per primam partem eiusdẽ a denoiat pportiõem b ad e: quare et proportionem d ad c. ergo a in c per eiusdẽ scdam ptem producit d. constat igitur quod fit ex b in se: equũ esse ei quod fit ex a in c. et propositum.



¶Si primum ad scdm sicut tertiũ ad quartũ: quod fit ex primo in quartum: equale est ei quod ex secundo in tertium producitur. 10

¶Hec siue quod vicesimaquita secũdi pponit. Sit ergo proportio a ad b vt c ad d: et ex b in c fiat e. dico e tm esse quantum quod fit ex a in d. sit enĩ f denoians proportiõem b ad a: denoiabit etiã pportiõem d ad c. ergo per scdaz partem septime huius f in c cõstituit d. ergo per octauam scdi e ad b sicut d ad f. sed et f in a per eãdem scdam partem septime huius facit b: ergo per primã ptẽ eiusdẽ a denoiat pportiõem b ad f. quare et proportiõem e ad d. per scdam ergo partem eiusdem a in d facit e. quod est ppositum.



¶Si scdm alterum duorũ nũerorum sumãtur partes a reliquo dicte: erit ab eo quod ex eis cõponitur proportio eiusdem ad reliquum denoiata. vnde manifestum est quod oẽs ille se habent ad vnum sicut reliquus ad denoiantem. 11

¶Sint a et b duo nũeri: sumãturque scdm a ptes denoiate ab b: sitque c cõpositum ex ipsis. dico pportiõem a ad b denoiari ab c. nam quia tot sunt in vno partes ille: quot sunt vnitates in b. erit vt sicut a ad b: ita partes ille ad vnum. sed vnũ in illis producit ipm c: ergo per septimã huius proportio c ad vnum denoiatur ab c composito ex ipsis partibus. ergo et proportio a ad b ab eodem denoiatur. Correlarium ex modo demõstrandi notum est. pponebat enĩ hinc esse notũ sicut c ad vnũ. ita a ad denoiantem b qui positus erat denoiare c. et hoc fuit ostensum.

¶Que a cõtra se primus partes denoiantur: vnam non cõstituũt. 12

¶Sint a et b numeri cõtra se primi: et aggregatus ex ipsis sit c qui per nonam tertij est primus ad vtrũque a et b: et sit d pars denoiata ab a/ et e pars denoiata ab b. dico d et e nõ cõstituere partem vnã. duco enĩ a in b: et proueniat f qui per vicesimãquitam tertij est minimus quẽ nũerant a b: qui et idem f per decimam eiusdem tertij est primus ad c. et per scdam huius: d est reducte ptes denomiate ab f et sumpte scdm b. et e reducte partes denoiate ab f et sumpte scdm a. quare d e simul sunt ptes denoiate ab f: et sumpte scdm c. quare per correlarium pcedentis d e simul ad vnũ: sicut c ad f. at c nõ est ps f: cũ ipsi mõstratus sit esse primus: igitur neque d e pars vnius. non cõstituũt igitur d e partem vnam. quod est propositum.

¶Si a quotlibet nũeris numerorum ab vnitate proportionalium partes denominentur: vnam ex eis componi est impossibile. 13

Sint a b c d numeri ab unitate continue proportionales: et a quolibet eorum ut c d denominetur e et f scilicet e ab c/ et f ab d. dico e et f non constituere partem unam. et sit g aggregatum ex a et unitate. quia enim c numerat d manifestum est per vicesimamquintam tertii d esse minimum numerum quem numerant c d. atque per vicesimamquintam secundi c numerat d secundum a: et d seipsum secundum unitatem. et per secundam huius e est reducte partes denominate ab d et sumpte secundum a. et f est pars denominata ab d sumpta secundum unitatem. igitur e f simul est partes denominate ab d sumpte secundum g. quare per correlarium penultime huius e f simul ad unum ut g ad d. sed g non est pars d. nam si g sit numerus primus et numeraret d: per vicesimamseptimam quarti etiam numerabit a totum scilicet suam partem. quod est impossibile. et si g sit compositus: ergo per secundam tertii ab aliquo primo numerabitur qui per vicesimamtertiam primi numerabit d. quare per vicesimamseptimam quarti numerabit a: et etiam numerat totum g. ergo per duodecimam primi numerabit residuum: numerus scilicet unitatem. quod est impossibile. non est igitur g pars d: quare neque e f pars unius. non igitur e f constituunt partem unam. quod est propositum.



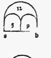
14 Partes a duobus numeris dicte sic se habent ad partem a numero ex eis composito denominatam: sicut quadratum compositi ad numerum qui ex ductu unius in alterum producitur.

Sint a et b duo numeri: et c ex ipsis compositus: sitque d quadratus c. et ducatur a in b et fiat e. et sit f pars denominata ab c. et sit rursus g pars denominata ab a: et h pars denominata ab b. dico ut d ad e ita g et h ad f. duco enim c in a et fiat k/ et c in b et fiat l. eritque per novam primi k et l sicut tanquam d. intelligo ergo sex numeros e/k/f/h/l/g quorum dico e ad k primum ad secundum: sicut f ad h tertium ad quartum. Item e ad l primum ad quintum sicut f ad g tertium ad sextum. nam per septimam secundi e ad k tanquam b ad c. sed per primam huius b ad c tanquam f ad h. est igitur e ad k tanquam f ad h. Item per eandem septimam secundi e ad l tanquam a ad c. sed per primam huius a ad c tanquam f ad g. est igitur e ad l tanquam f ad g. ergo per vicesimamtertiam secundi e primus ad k et l simul secundum scilicet et quintum tanquam f tertius ad g et h simul quartum et sextum. at k et l simul sunt d: igitur d ad e tanquam g et h simul ad f. quod est propositum.



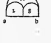
15 Si duo numeri componantur fueritque compositi ad alterum multiplex proportio: erit reliquus alteri equalis aut multiplex.

Sit numerus a b compositus ex duobus a et b: sitque compositus a b multiplex ad a. dico b esse equalem a vel eidem multiplicem. nam cum a b sit multiplex ad a: ipse a numerat totum a b et seipsum etiam detractum numerat. ergo per duodecimam primi numerat b residuum. quod si semel a numeret b: ipse a erit equalis b. at si a multoties numeret b: erit per diffinitionem b multiplex ad a. quod est propositum.



16 Si totius ad alterum fuerit proportio supparticularis: erit illius ad reliquum similis denominationis proportio multiplex.

Proportio tota supparticularis aut tota multiplex dicitur quotus fuerit supparticularis aut multiplex: ut primus supparticularis est sesquialter et sequitur per ordinem sesquitertius/ sesquiquartus. et ita deinceps secundum numerorum seriem. et primus multiplex est duplus: et sequitur per ordinem triplus/ quadruplus/ quincuplus: sicque deinceps secundum seriem numerorum. sit a b totus numerus constitutus ex a et b: sitque a b supparticularis ad b. dico b totum esse multiplicem similisque denominationis ad a. nam quia compositus a b supparticularis ad b addit super b numerum a: ergo per diffinitionem a est pars aliqua b. at quota fuerit a pars b totus est a b supparticularis ad b. et quota pars a fuerit b totus erit b multiplex ad a. per diffinitiones igitur quota fuerit proportio supparticularis a b ad b: tota erit b ad a proportio multiplex. quod est propositum.

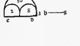


17 Si alterius ad alterum fuerit proportio multiplex: erit totius ad ipsum proportio superparticulario.

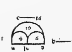
Hec est conversa precedentis. ut sit b ad a proportio multiplex: dico compositi a b ad b totam esse proportionem supparticularem. nam quia b est multiplex ad a: erit a per diffinitionem aliqua pars b. at totam partem b addit a b super b. nam addit a. igitur quota fuerit b ad a proportio multiplex: tota erit a b ad b proportio supparticularis. quod intenditur.

18 Si maioris ad minorem fuerit supparticularis vel multiplex supparticularis proportio: compositi ex eis ad minorem multiplex supparticularis: ad maiorem vero suppartiens erit proportio.

Sit a maior numerus/ et b minor: et sit a ad b proportio supparticularis: et sit c compositus ex a et b. dico c ad b proportionem esse multiplicem supparticularem: et c ad a proportionem esse suppartientem. capio enim ab a maiore numero partem equalem b que sit d: et residuum sit e. quia enim a est supparticularis ad b: manifestum est a addere super b quantum est e: et e esse partem b. et quia c est quantum e d et b: et d b duplum est ad b cui superaddit c quantum est e. igitur c addit super b duplum ad b et quantum est e pars eius aliqua. continet igitur c bis b et totam eius partem quota est e. est igitur per diffinitionem c ad b multiplex supparticularis. quod est primum. Sed et c ad a esse suppartientem ostenditur. nam cum b sit minor a et non sit pars a/ alioquin a ad b esset proportio multiplex. quod est contra hypothesim. ergo per primam primi b est partes a. sed c addit super a quantum est b. erit igitur c continens a et partes eius: ad a proportio suppartiens. quod est propositum. Et si maioris ad minorem fuerit proportio multiplex supparticularis: compositi ad minorem esse multiplicem supparticularem et ad maiorem esse suppartientem eadem demonstratio est accepto maiore numero multiplice supparticulari ad minorem.



19 Si maioris ad minorem fuerit proportio suppartiens vel multiplex suppartiens: erit compositi ad maiorem suppartiens: ad minorem vero multiplex suppartiens proportio.



¶ Sit a ad b superpartiens: et compositus ex a et b sit c. dico c ad a esse superpartientē: et c ad b eē multiplicē superpartientem. Demo enī ex maiore a numerum d equalem b: sitque e residuus qui quia a est superpartiēs ad b: per diffinitionem erit partes b. et quia c est tantum e d et b: et d b duplum est ad b: adderet c quantum est e super duplum b. at e mōstratus est esse partes b: ergo c continet b aliquoties et partes eius. est igitur per diffiniti onem c ad b multiplex superpartiens. quod est presentis theorematis scdm. Primum autem quod c sit superpartiēs ad a patet. nam quia c est partes b erit ut b sit partes a: alioquin a eēt multiplex ad b. quod est contra hypothesim. at c addit super a quantum est b. est igitur c ad a superpartiens. quod est propositum.

¶ Ois compositi ad maiorem componentiū superparticularis vel superpartiēs: ad minorem vero multiplex/multiplex superparticularis vel multiplex superpartiēs proportio reperitur. 20

¶ Primum quod compositus ad maiorem componentiū sit superparticularis aut superpartiēs patet. nā compositus addit super maiorem componētium quantum est minor qui per primam primi erit pars vel partes maioris si pars maioris per diffinitionem compositus ad maiorem componētium est superparticularis si partes erit superpartiens. multiplex autem ad maiorem nunquam eē potest. Secūdum quod compositus ad minorem sit multiplex/multiplex superparticularis aut multiplex superpartiens ostenditur. nā maioris componentiū ad minorem proportio: divisione aut est multiplex aut superparticularis aut superpartiens aut multiplex superparticularis aut multiplex superpartiens. Si autem maioris componentium ad minorem proportio sit multiplex: cū minor maiorem numeret et etiam seipsum ipse aliquotiens sumptus numerabit totū. quare tūc compositus erit multiplex ad ipsum. et si maior ad minorem sit superparticularis aut multiplex superparticularis per decimā octavam huius compositus ad minorem est multiplex superparticularis. et si maior ad minorem sit superpartiēs aut multiplex superpartiēs: per decimānonam huius erit cōpositus ad minorem multiplex superpartiēs. est igitur totum propositum notum.

¶ Quecūque maioris ad minorem proportio multiplici addatur: tota erit aut multiplex/ aut multiplex superparticularis/ aut multiplex superpartiens. 21

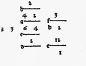


¶ Sit quecūque proportio multiplex data: et alia quecūque maioris ad minus: que per sextam quinti contineantur in minimis terminis a/b/c. ita ut a ad b sit data proportio multiplex: et b ad c sit altera maioris habitudinis. dico totā proportionem a ad c esse multiplicem aut multiplicem superparticularem aut multiplicē superpartientem. nam quia a est maior b et b maior c/ et a ad b proportio est multiplex: per nonam secūdi proportio a ad c maior est proportione a ad b. addit igitur proportio a ad c super proportionem a ad b vel numerum. sicque tota erit multiplex vel partem aut numerum cū parte: et sic erit multiplex superparticularis: vel partes aut numerum cū partibus et sic erit multiplex superpartiens. est itaque notum quod dicitur.

¶ Si due multiplices coniungantur: composita erit multiplex. 22

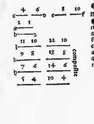
¶ Nam utraque a numero denominatur: quarum si alter in alterum ducatur proveniet numerus a quo per octavam huius denominatur composita: quare erit multiplex. quod est propositum.

¶ Data multiplice superparticularem invenire: que cū illa multiplicem cōstituat. unde perspicuum est ex qualibet multiplice cū tota superparticulari: multiplicē uno maioris denominationis provenire. 23



¶ Multiplices et superparticulares tote dicūtur: quarum denominatio multiplicis et denominatio partis superparticularis ab eodem numero sumitur. ut tripla et sesqualtera. tripla enī a duobus et sesqualtera similiter sumitur. nam sesqualtera continet totum et unam secūdam. tripla et sesquitertia/ quadrupla/ et sesquiquarta: sicque deinceps. Sit a quecūque multiplex proportio data et b numerus eam denominans: et sit c proportio superparticularis cuius numerus d denominet partem. sitque d equalis b. et sit e totalis denominatio proportionis superparticularis c: que quidem denominatur ab uno et numero partis. et quia unū in b facit b et pars denominata ab b in b facit unum: ergo tota denominatio e ducta in b facit numerum uno maiorem b qui sit f: et quia per octavam huius est denominans proportionis composite ex a et c. est igitur proportio composita ex a et c a numero scilicet denominata: multiplex. et quia numerus denominans compositam est uno maior numero denominante proportionem a: ex hoc correlarium et totum propositum notum est.

¶ Data superparticulari quotlibet multiplices reperire: quarum quelibet cum illa multiplicem componat. 24



¶ Sit enī a data proportio superparticularis et pars que cum uno eam denominat sit b. capio quotquot multiplices voluero: quarum cuiuslibet numerus denominans: sit totū ad b/ et b pars. et ex modo demōstrādi precedētis a: cū qualibet illarum multiplicium constituet multiplicem/ efficieturque propositum.

¶ Data multiplice quotlibet sumere superparticulares: quarum quelibet cum ea efficiat multiplicem superparticularem. 25

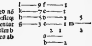
¶ Sit a data proportio multiplex ad quā iubemur quotlibet superparticulares invenire: quarum quelibet cū ea constituat multiplicem superparticularem. capio b numerum denominantem proportionem multiplicem a: et sumo c/ d/ e/ f et quotquot voluero multiplices ad b: et ex ipsis denominatas per ordinem. et capio superparticulares denominatas a partibus c/ d/ e/ f: que sint g/ h/ k/ l quarum quālibet cū data multiplice dico cōstituere multiplicem superparticularem. nam quia g superparticularis sumpta ab c et sua parte: denominatur a toto c et parte denominata ab c. et b in toto c semel constituit multiplicē: et in parte c constituit totam partem quota pars ipse positus sit ad c. composita ergo ex a data multiplice et g superparticulari sumpta a parte constituit multiplicem superparticularem. et eadem ratione composita ex a et h/ et ex a et k/ et ex a et l. quod est propositum.

26 ¶ Quotlibet multiplices inuenire: que cū data supparticulari multiplicem supparticularem constituant.



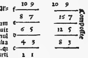
¶ Sit a data supparticularis / et b numerus denoīans eius ptem / et m tota eius denoīacio cui q̄libet multiplices supassumātur: vt quoꝝ nūeri denoīantes sint c / d / e / f: manifestū est per vicesimātertiam hui⁹ b in c / et in d / et in e / et in f cōstituere nūerū multiplicisq̄ denoīatiōez. capio ergo g / h / k / l totidem multiplices vno maiores denoīacionis. et q: g addit vnū sup multiplicē c: si ergo m totalis denoīatio ꝓportionis supparticularis ducatur in g ꝓueniet numerus cū parte denoīata ab b: quare proportio multiplex supparticularis. vt in presenti figuratiōe ꝓueniret ꝓportio septupla / sesqualt̄a. et ita de h / et k / et l demonstrabis.

27 ¶ Data multiplice quotlibet supparticulares inuenire quaꝝ quelibet cū eadem multiplicem suppartientem componat.



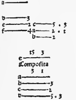
¶ Sit a data multiplex / et b numerus ipsam denominās: sumo quotlibet numeros eo maiores sed nō multiplices qui sint g h k l et partes ab ipsis denomīate sint c d e f. vt c sit denoīata ab g / et d ab h: sicq̄ ꝯsequēter. dico q̄ qꝛ b in c / in d / in e / et in f non partem sed partes ꝓducit. nam si ducat̄ b in c et ꝓueniat m ptes denoīate ab g: p correlariū vndecime hui⁹ q̄ ꝓportio b ad g: ea ē m ad vnū. sed p hypothesim b est ptes g: igit̄ et m est ptes vnius. et ita si b ducat̄ in d et e et f ꝓuenient ptes. itaq̄ supparticulares ab illis partibus dicte cum data multiplice quelibet ꝯstituet multiplicem superpartientem.

28 ¶ Sola supparticularium sesqualtera: est q̄ cū nulla multiplice / multiplicem suppartientem producit.



¶ Nam qꝛ sesqualt̄a denoīatur a sc̄da que est vnius dimidium et dimidiū in oēm numerum ductum aut vnum ꝓducit aut numerum aut dimidium addit. nam binarius oēm nūerū numerat aut superfluit vnitas ergo denoīans partis sesqualt̄e in denoīantem multiplicis: aut multiplicem ꝓducet / aut multiplicem supparticularem. non itaq̄ cū multiplice multiplicem suppartientem ꝓducet. at q̄ oīs alia supparticularis cū aliqua multiplice multiplicem suppartientem efficere possit hinc cognoscitur. qꝛ si sumas numerum denoīantem multiplicem vno minorem numero denoīante partem date supparticularis ex precedēte efficies ꝓpositum. potes et primam partem facile ex modo demōstrandi vicesime sexte huius cognoscere: quēadmodum secundam partem ex precedente cognoscis.

29 ¶ Sola multiplicium dupla: cū nulla suppartiēte multiplicem efficit proportionem.



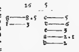
¶ Hec ꝓponit duplam cū nulla suppartiēte multiplicem ꝯstituere et oēm aliā multiplicem cū aliqua suppartiēte: posse multiplicem constituere. Primum patet et sit a ꝓportio dupla et b numerus ipsam denoīans: sitq̄ c quecūq̄ ꝓportio suppartiens. dico a cum c non constituere ꝓportiōem multiplicem. Sumo enī partes c q̄ denominētur ab d et numerētur ab e: et duco b in illas partes et ꝓueniēt partes sil̄es et numerate a numero qui fit ex binario: id est b in e. sic ergo nūerus illaꝝ partium f: quē dico nō esse numerum. nam nō erit equalis d: qꝛ e numeraret d. neq̄ d ipm numerabit. nam s̄m vnitatem non numerabit: qꝛ eēt ei equalis. neq̄ s̄m binarium qꝛ d et e equarētur. neq̄ s̄m maiorem binario: quia d maior est e. cū ergo b in e denoīans in partes alt̄ius non ꝯstituat numerum non ꝓducetur multiplex. Sc̄d̄m patet nam data quacūq̄ alt̄a multiplice vt a: capio b numerum ipam denoīantem quem facio aliquaꝝ partium denoīatorem: et sumo numerum partium vno minorem b qui sit c: sitq̄ d suppartiēs partium c. dico a et d simul ꝯstituere multiplicem. nam qꝛ b est denoīans a et denoīans prīū d: ideo b in c ꝯstituet nūerum. denoīabitur itaq̄ cōposita a numero: quare erit multiplex. qd̄ est ꝓpositum.

30 ¶ Data superpartiente multiplices quotlibet reperire: quaꝝ quelibet in illam ducta producat multiplicem.



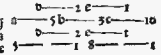
¶ Sit a data suppartiens: et numerus partium sit b: et nūerus illas denoīans sit e. capio p̄mo multiplicem que denoīetur ab c que sit d: deinde que denoīetur ab multiplicib⁹ c quotquot voluero: sintq̄ sui denoīantes e f g. dico a datam suppartiētez cū qualibet multipliciū d e f et g ꝯstituere multiplicē. nam b in c ꝯstituet numerum et in e etiā numerum qꝛ duplum et in f triplū et g quadruplum acceptis sez per ordinem multiplicibus denoīantis c. ergo suppartiēs a cū qualibet illaꝝ multipliciū cōstituit multiplicem. quod est propositum.

31 ¶ Quotlibet suppartientes / quaꝝ quelibet cum ꝓposita multiplice multiplicem supparticularem constituat / inuenire.



¶ Sit ꝓposita multiplex a cuius numerus denoīans sit b: sumo quēlibet nūerum maiorem b qui sit c. et duco b in c et fiat d. et capio e minorem vno d. capio item partes denoīatas ab e s̄m nūerum c que sint f. qm̄ enim b in c ꝯstituit d: ideo b in f cōstituet sil̄es partes s̄m numerum d. at ipē s̄m numerum d sumpte faciūt vnū et vnā amplius. sit itaq̄ g suppartiens denoīata a ꝑcibus dictis ab e et sumptis s̄m numerum c q̄ (qꝛ b in f ꝯstituit numerum et partem) eadem suppartiēs cū a ꝯstituet supparticularem et quotq̄t voles eadem rōne tibi sumas suppartiētes q̄ cū a ꝯstituent supparticularem. qd̄ est ꝓpositū.

32 ¶ Multiplices aliquot sumere: que in datam supparticularem ducte: ꝓcreent multiplices superparticulares.



¶ Sint a et b mīmi t̄mini date ꝓportionis suppartiētis: qui qꝛ sunt ꝯtra se p̄mi quero p vltimā tertij multiplicem a q̄ addat sup multiplicem b vnitatem que sit c: sitq̄ nūerus s̄m quē a numerat c nūerus d. sumo vnitatem que sit e. eritq̄ d ad e multiplex denoīata ab d. at per demōstratū in principio tertie

10 —— 5
25 —— 5
40 —— 5
Composite.

quinti ꝓportio composita ex a ad b ⁊ d ad e est que est inter ꝓductum ex d in a: ad ꝓductum ex e in b: at e in b facit b: ⁊ d in a facit c cōtinens aliq̄tiens b ⁊ eius vnā partem. nam positus est c maior vnitate multiplice ad b. igitur ꝯposita ex data suppartiente ⁊ multiplici d ad e est multiplex supparticularis: quod intenditur. et ita quālibet aliam inuenias.

¶ Suppartiētes quotlibet que cū data multiplice ꝑficiant suppartiētes multiplices: inquirere. 33

b —— 5   c —— 4
a —— 2
e —— 10   d —— 14
f —— 7
g 17 —— 10
34 —— 10
Composita.

¶ Sit a denoīans multiplicem: sumo duos numeros c d quoꝝ vnus non nūeret alium: sitq; b maior ꝗ primus ad a per vltimam tertu quero multiplicem ad a: qui addat sup multiplicem b nūerum c. sitq; huiusmodi multiplex ad a numerus d quē numerat a sm̄ fiet multiplex ad b sit e. dico suppartiētem cuius denoīans partium sit e multiplex b: et nūerus partium sit f esse vnam suppartientum q̄ querūtur. nam a in f partes illas ductus sibi partes ꝓducit: quaꝝ numerus est d: ideo numerum ꝓducunt sed ⁊ supfluūt partes sm̄ numerum c que non numerant b: ergo a ⁊ suppartiens ꝑtiū f denoīataꝝ ab e que sit g cōstituent ꝓportiōem multiplicem suppartientem. et hoc pacto quotquot voles quere.

¶ Proposita suppartiente multiplices perscrutari: que cum eadem multiplices suppartientes constituant. 34

f —— 10   50 —— 5
e —— 7   35 —— 5
d —— 4   20 —— 5
Composite
a 5 —— 3
b —— 3
c —— 2

¶ Sit a suppartiēs data/ ⁊ b denoīans ptes: c vo numerus partium: et sit d maior b vno/ ducaturq; c in d ⁊ ꝓueniet multiplex b/ ⁊ insup totidem ptes. quare multiplex denoīata ab d cum suppartiente assignata a ꝯstituet mltiplicē suppartiētem. et ita fiet si q̄libet mltiplice ad b maior vno sumat vt e ⁊ f. Reliquas has ꝓpōnes que inuētionem ꝓponūt accuratius exequi curaui: que vbi exactior ꝓsecutio facta fuisset etiam legentibus allatura fuisset fastidium.

¶ Supparticularis ⁊ simul multiplex supparticularis cum eadem multiplice: similes producunt proportiones. 35

c 6 —— 4   12 —— 4
b 3 —— 2   6 —— 2
a 2 —— 1   Composite.

¶ Sit a ꝓportio multiplex/ et b ꝓportio supparticularis/ et c ꝓportio multiplex supparticularis sit. Dico ꝓportiōes compositas ex b ⁊ a: et ex c et a esse siles. nam cū supparticularis denoīetur ab vno ⁊ parte/ ⁊ mltiplex supparticularis denoīetur a numero ⁊ eadem parte: numerus igitur multiplicis in vnum ⁊ numerum ductus semꝑ facit numerū. addito igitur vtrobiq; qd̄ fit ex eodē multiplicis nūero in partem que supest si cum vno nūerum facit et cū reliquo facit eūdem: et si cum vno pars vel partes supfluūt: itidem ⁊ cum reliquo. quare ꝓuenient siles ꝓportiōes. Id tamen aduerte ꝙ si q̄titas denominatiōis crescit in altera ꝓductaꝝ qd maxime in suppartientibus accidere solet: non tū inde genus ꝓportionis mutabitur.

¶ Quācunq; proportiōem suppartiens cum multiplice constituit: ciusmodi etiā cum eadem efficiet simul multiplex suppartiens. 36

16 —— 5   c 8 —— 5
10 —— 5   b 5 —— 3
Composite.   a 2 —— 1

¶ Sit a multiplex: b suppartiens quecūq;: et c simul suppartiens multiplex. dico b et a simul/ item c et a simul similem constituere proportiōem. huius vt precedentis demonstratio est.

¶ Si ab vnitate numeri cōtinue disponātur: et singuli ad ꝓximos descēdendo cōparētur: fient oēs supparticulares proportiones: tanto minores q̄to remotiores. ad vnitatem vero omnes multiplices: tanto minores quāto ꝓpinquiores 37

k —— 10
h —— 9
g —— 8
f —— 7
e —— 6
d —— 5
c —— 4
b —— 3
a —— 2
1

¶ Sint a/ b/ c/ d/ e/ f/ g/ h k numeri ab vnitate continue sumpti: dico p̄mo k ad h esse supparticularem proportionem. et h ad g. et g ad f. sicq; deinceps vsq; ad vnitatem. et k ad h minorem esse proportiōem q̄ h ad g et cetere inferiores. et h ad g minorem q̄ cetere inferiores. nam cū vnitas sit cuiuslibet nūeri pars: et quilibet superiorum addat vnitatem ipsam tū excludendo sup ꝓximum inferiorem: ergo per diffinitionem k ad h et h ad g atq; ita deinceps: est ꝓportio supparticularis. et quia per conceptiōem pars ea minor est que maiorem habet denoīationem et vnitas similiter per conceptiōem sit cuiuslibet numeri pars ab ipso denoīata: ergo ꝓportiones ille ab vnitate remotiores: que a minori parte denominātur sunt minores. et quāto ipsi vnitati ꝓpinquiores a maiori parte denoīantur: quare tum erūt maiores. et si toes series numerorum esset ordiata: oēs supparticulares specie quidem habite essent non aūt sm̄ numerum accepte. nam ea ꝓportio que est ternarij ad binarium: est senarij ad quaternariū et duodenarij ad octonarium: non tamen due iste in ordine proximorum numerorum essent accepte. Secūdo dico omnes cōsimiliter ꝯtinue ad vnitatem sumptas esse multiplices tanto minores q̄to ipsi vnitati viciniores. nam a primus post eam nūerus bis eam ꝯtinet et b ter ⁊ c quater. et ita ꝯsequēter sm̄ oēs species multiplicium sed ⁊ ꝯtinue a maiore numero denoīaꝛ multiplex. et q̄to vnitati vicinior a minore: nullus enim binario minor est. est igitur cognitum quod erat demonstrandum.

¶ Si a cōmuni angulo naturalis series numerorum in longum ⁊ latum extendatur: et ipsis inuicem multiplicatis: ⁊ qui ꝓueniūt in angulari cōuentu positis: si singuloꝝ ordinum ad primum fiat collatio ordo cōtinuus multiplicium ꝓcedet: si ad ꝓximos preterq; ad primum ordo supparticulariū. et qui circa diametrum collocati sunt: oēs erunt quadrati. qui vero his hinc inde ꝓximi: sunt altera parte longiores. 38

Longitudo.

Latitudo.										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Compactio vbiq₃ ad primā
2	4	6	8	10	12	14	16	18	10	Dupla ad eandem.
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	Tripla ad eandem
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	Quadrupla ad eandem
5	10	15	10	25	30	35	40	45	50	Quincupla ad eandem.
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	Sexcupla ad eandem.
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	Septupla ad eandem.
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	Octupla ad eandem.
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	Nōcupla ad eandem
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	Decupla ad eandem.
Cōparatio ad alterinsecꝰ prima	Dupla.	Sesqualtera.	Sesquitertia	Sesquiquarta	Sesquiquinta	Sesquisexta	Sesquiseptia.	Sesquioctaua	Sesquinona	

¶ Formata ergo hac mēsula Pythagore ꝛ dispositio vt ꝓponit propositio numeroꝝ ordinibus: dico ꝑmo ꝙ si singuli ordines ad primum comparētur ꝓuenire per ordinem multiplices. nā cum vnitas sit caput prime linee: et secūde linee caput ꝑmusq₃ numerus sit binarius. est ergo primus numerus scde linee ꝑmo numero duplus ꝛ ꝑmus multiplex. et quia binarius multiplicat oīs nūeros prime linee et ex multiplicatione ꝯtinue scda linea ꝑcreat ꝛ secūdus numeroꝝ ordo. ergo ꝑ diffinitiōem quoties vnitas in binario toties ꝯtinue singuli ꝑmi ordinis in singulis secundi existunt. igitur singuli secūdi ordinis ad singlos primi dupli sunt atq₃ eque multiplices. et qꝛ primus tertij ordinis est triplus ꝑmo primi qui est vnitas et ex ꝯtinua multiplicatione singuloꝝ primi ordinis per ipm producūtur singuli tertij ordinis: ergo ꝑ idē qd prius singuli tertij ordinis sunt tripli ad singulos primi ordinis. hac q₃ rōne ꝓbabis singulos quarti ad singulos ꝑmi esse quadruplos / et quinti quincuplos: sicq₃ deinceps. Secūdo dico ꝙ si fiat comparatio tertij ordinis ad scdm / ꝛ quarti ad tertium / et quinti ad quartum / et sexti ad quintum: et ita ꝯsequēter ꝯtinue supparticularium ordines surgere. nam ꝯtinue videmus singulos horū ꝛ singulos illoꝝ ex ductu duoꝝ primoꝝ numerorum descēdendo ab vnitate sumptoꝝ in eos enasci. at per precedētem isti numeri ꝯtinue seriem supparticularium complent. igit̄ ꝛ singuli posterioris ordinis ad priorem ordinem silem retinebunt ꝓportiōem. qd est scdm. Tertio dico nūeros qui constant circa dia̅metrum esse quadratos. illi eni sunt quoꝝ caput est vnitas: et supremus est oīm maximus quasi lōgissima linea: et numeroꝝ ordines quasi ex equo ꝑ medium secātes. quos dicimus esse quadratos. nam illos ꝯtinue videbis ex lateribus equalibus ꝓductos vno sꝫ s̄m nūeroꝝ seriem crescentibus. erūt igit̄ oēs quadrati. et si lineas ad coꝝ latera equidistāter ꝓtraxeris: ꝯtinue quadratam cōcludes figuram. Quarto dico numeros hinc ꝛ inde quadratis altrīsecus ꝓxime adiacētes: esse altera parte longiores. nam oēs illi s̄m numerorum seriem ꝓducūtur ex lateribus vno distātibus: ꝙ vnum coꝝ latus sit quadrati latus: et alterū sit vno latere eiusdē quadrati minus. sicq₃ tota cognoscit̄ ꝓpositio. Et ex hoc q₃ notum eē potest ꝙ si singuli altera parte lōgiores singulis quadratis quibus altrinsecus circūsistunt comparētur: a ꝓportione dupla oēs supparticularium species ꝓcreantur: vt duo primus altera parte lōgior vnitati primo quadrato cōparatus est duplus. et 6 altera p̄te longior ad 4 scdm quadratum relatus per scdam partem huius est sesqualter. et 12 tertius alt̄a parte lōgior ad 9 tertium quadratū ꝑ idem est sesquitertius: et hoc pacto ꝯsequēter. ¶ Et idem de supparticularibus speciebus euenerit: si primum altera parte longiorem secūdo quadrato / et scdm alt̄a parte lōgiorem tertio / et tertium quarto. et hoc pacto deinceps comparaueris. ¶ Et rursum si primum altera parte longiorem inter primum quadratū ꝛ scdm collocaueris: similis ꝓportionū habitudo seruatur / eritq₃ cōtinue ꝓportio dupla. ¶ Et si scdm alt̄a parte longiorem / inter scdm quadratum ꝛ tertium collocaueris: ꝯtinue sesqualt̄a habitudo seruabitur ex prima ꝛ scda parte huius. et ita ꝯsequenter reliquas supparticulariū ꝯiūctas hītudines reperias si reliquos lōgilateros nūeros suis quadratis medios infnexueris: ex quibus digna illa ꝯtemplatio ad Pythagoricā ꝛ Platonicam intelligentiam momētum habens q̄ de quadratis ꝛ alt̄a parte longioribus diuus Seuerinus 33 capite scdi sue Arithmetices elegantissime affert: vel perspectissima esse potest.

39 ¶ **Si supparticulares ab vnitate sumātur: binis ꝛ binis disiūctim ꝯiūctis prima multiplicium: ac consequēter oīm supparticularium species ꝓuenire cōuenict.**

¶ Sint a / b / c / d / e / f / g / h / k ꝯtinue ab vnitate sumpti supparticulares numeri: ꝛ ꝯiungātur disiūctim bini ꝛ bini scꝫ c a. e c. g e. et k g. dico c ad a esse primam multiplicium et e ad c et g ad e ꝛ k ad g ꝯtinue ꝯstituere species supparticlarium. nam ꝑ penultimam erūt a / b c d e f g h k numeri ꝯtinue ab vnitate sumpti: sed ꝛ vno sꝫ intermisso hoc pacto binis ꝛ binis disiunctim sumptis: sumuntur oēs ab vnitate pares. quare per decimāoctauam septimi ipsoꝝ ꝯtinue sunt eedem ꝓportiōes que numeroꝝ ab vnitate cōtinue dispositoꝝ. at binariꝰ ad vnitatem est prima multiplicium et sequētium ad suū precedentem est series supparticularium. constat igitur quod erat demonstrandum.

k	10
h	9
g	8
f	7
e	6
d	5
c	4
b	3
a	2
	1

c 4	f 16	k 15
b 3	e 9	h 8
a 2	d 4	g 3
1		

¶ Si ꝓpositis ab vnitate quadratis: nũeri eis vno minores sumãtur: supparticulares ab illis dicte: proportionum ab vnitate erunt differentie. 40

¶ Sit vnitas: et numeri post ipsam a b c: et quadrati eorum d e f: et minores eis vno g h k. dico supparticulares denominatas ab g/h/k que sint d ad g. e ad h. et f ad k: esse differẽtias ꝓportionum ab vnitate sumptarum: et d ad g esse propoꝛtionem qua abundat dupla sup sesqualteram: et e ad h esse qua abundat sesqualtera sup sesquitertiam: hocq; in in medium ꝯsequẽter. Nam ꝑ primam quinti differẽtia qua abũdat a ad vnitatẽ. et b ad a est ꝓportio q̃ fit ex ꝓducẽs a in se et vnitatis in b: sed a in se facit d quod quidẽ d est eius quadratus et vnitas in b per scdam et decimãnonam primi q̃tum g. igitur ꝓpoꝛtio d ad g est differẽtia ꝓpoꝛtionis a ad vnitatem et b ad a. et hac rõne ostẽdetur ꝓpoꝛtiõem e ad h esse differẽtiam ꝓpoꝛtiõis b ad a et c ad b. et ita de quibuslibet consequẽter. quod est propositum.

h 16 15	f 5 4	c 4 1
g 9 8	e 4 3	b 3 1
	d 3 2	a 2 1

20 12	12 1

Composite mediarum.

18 10	10 1

Composite extremarũ.

6—5	d 5—1
5—4	c 4—1
4—3	b 3—1
3—2	a 2—1

¶ Si oꝛdinẽtur ꝯtinue multiplices et supparticulares: erit vt extremarũ multiplicium quelibet due ꝯiũcte minus sint q̃ media duplicata vel due medie ꝯiũcte: supparticulares vero maioꝛes. 41

¶ Sint primo ꝯtinue multiplices a b c: dico cõpositam ex a et c minoꝛem esse propoꝛtiõem q̃ ꝓpoꝛtio b duplicata. nam quia denominãtes ꝯtinue equaliter se excedũt: ergo per scdam primi denoĩans b est medietas denoĩantiũ a et c simul sumptorum. et ꝑ decimãnonam eiusdẽ denoĩans b in se maioꝛem ꝓducit numerum q̃ a in c. at ꝑ octauam huius b in se ꝓducit equalẽ composite ex ꝓpoꝛtione b duplicata que per vicesimãscdam huius erit multiplex. et denoĩans a in denoĩantem c: ꝓducit denoĩantem per idem multiplicis ex a et c. igitur multiplex ex b duplicata: a maioꝛe nũero denoĩata q̃ multiplex ꝯposita ex a et c maioꝛ est multiplice cõposita ex a et c. qđ est primum. Sint secũdo d e f ꝯtinue sumpte supparticulares quarum d sit maxima: et differẽtie earum g et h. dico ꝓpoꝛtiões d et f simul maioꝛem ꝯstituere propoꝛtionem q̃ sit ꝓpoꝛtio e duplicata. nam q: per precedẽtem partes g denoĩant a minori numero et partes h ab maioꝛi: nam a numeris cõtinuorũ quadratorum vno minoribus. ergo per primam huius ꝓpoꝛtio g maioꝛ est ꝓpoꝛtiõe h. at d et f sunt tanq̃ e g et f. nam d per se tñ est q̃tum e g. et e bis tanq̃ e f et h. et monstrata est e maioꝛ h. igiť per quintam quinti erũt d et f maius q̃ e duplicata. et hoc modo facile idem ꝑ vtraq; parte ostendas si due ponãtur medie ꝓpoꝛtiões. sicq; cõcluditur propositum.

f—9	c—5
e—7	b—4
d—5	a—3

¶ Si impares post ternarium ꝯtinue sumpti: ad nũeros post binarium naturali serie oꝛdinatos comparẽtur: erũt vnt suppartientes ꝯtinua denoĩatione crescentes. 42

¶ Sint a b c numeri post binariũ in cõtinue sumpti: et d e f sumpti cõtinue impares post ternarium. dico d ad a/ et e ad b/ et f ad c suppartiẽtes ꝯtinua denoĩatiõe cresciẽtes. nam cũ differẽtia imparium sit binarius d addit sup a binarium qui minoꝛ est eo vno. igitur d ad a est suppartiẽs. et item cum differẽtia imparium sit binarius: et nũerorum ab vnitate dispositorum differẽtia sit vnitas: addet e sup b vno plus q̃ d sup a. sed et q: c/e/f sunt cõtinue impares: addet f sup c adhuc vno plus q̃ e sup b. crescunt igitur differentie imparium sup nũeros ab vnitate sumptorum sicut et ipsi nũeri: ita q̃ cõtinue precedẽs est differẽtia imparis sup sequẽtem. sed numeri vnitate distãtes sunt ꝯtra se primi. igitur differẽtia q̃ est numerus precedẽtis ad sequẽtem numerorum ab vnitate dispositorum: non est pars sequẽtis. est igitur ꝑ primam ꝓmi eius ptes. erit igiť ꝓpoꝛtio e ad b suppartiens/ et f ad c suppartiẽs. et q: sue partes fm numerorum vnitate dispositorum q̃titatem crescunt: erũt et earum ꝯtinue crescẽtes denoĩationes: imo et quia denoĩant a numeris ꝯtra se primis ꝯtinue ꝓcedent diuerse suppartientiũ species. qđ est propositum.

d 5	h 9	n 26
c 4	g 7	m 17
b 3	f 5	l 10
a 2	e 3	k 5

¶ Si compositus ex primo pari et impari et qui ex reliquis imparibus eidem ꝯiũctis aggregãtur: ad numeros a duobus dispositos comparẽtur: ꝓueniẽt diuerse multiplices supparticulares fm nũeros multiplicium et denoĩationes partium siles habẽtes. 43

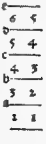
¶ Sint a b c d nũeri a binario ꝯtinue succedẽtes: sintq; e/f/g/h nũeri a ternario ꝯsequẽter impares sitq; k compositus ex a et e primo pari et impari. et l compositus ex f et k. et m cõpositus ex g et l. et n ex h et m: dico k/l/m/n cõpatos ad a/b/c/d/ facere multiplices supparticulares fm nũerum multipliciũ et siles partium denoĩationes. nam k ꝯponiť ex a et e binario et ternario. at e addit sup a partem vnam ab ipso denoĩatam sc3 vnam mediam seu scdam qđ idem valet: ergo k compatus ad a bis ipm ꝯtinet et eius mediam et ad ipm est primus multiplex supparticularis. sed et ꝑ decimãnonam septimi f cõponitur ex a et b. et g ex b et c. et h ex c et d. et per septimã sexti quadratũ cuiuslibet addit sup quadratũ ꝓrimi qđ ex ipsis cõponiť vt quadratum b sup quadratum a q̃tum qđ cõponiť ex a et b. et quadratũ c sup quadratum b q̃tum cõponiť ex b et c. et ita deinceps. et quia k addit sup quadratũ a vnitatem: l similiter addet sup quadratum b: et m sup quadratum c: et n super quadratum d vnitatem. quare singuli eorum singulos illorum cõtinent fm se et partem ꝑ conceptiõem ab ipsis dictam. erũt igitur ꝯsequẽter fm ipsos: multiplices supparticulares. quod est propositum.

o 6	k 35	f 11
n 5	h 24	e 9
m 4	g 15	d 7
l 3	c 8	b 5
		a 3

¶ Si duo ꝓmi impares ꝯiũganť: cõpositoq; reliqui ĩpares applicẽtur: erit vt ꝓpoꝛtiones cõpositorum ad nũeros post binarium sumptos sint diuerse multiplices suppartientes et ab eodem numero et partes numeratas et multiplices denoĩatas habẽtes. 44

¶ Sint duo primi ĩpares a et b: et cõposit⁹ sit c: sintq; reliq̃ ĩpares d e f qui addãť ꝯposito c: sintq; aggregati g/h/k/ et l/m/n/o/ numeri ꝯtinue post binariũ sũpti. dico c ad l/ et g ad m/ et h ad n/ et k ad o diuersas eẽ multiplices suppartiẽtes et singulas ab eodem numero multiplices denoĩatas et partes

numeratas.nā b addit super a binariū:ergo c bis continet a illi superaddēs binariū. sed binarius est vno minor a:ergo est eius totidē partes.est igitur c ad a primā multiplex superpartiēs: quare ⁊ d ad l. q: a et l sunt idem numerus. Item q: vt visum est c addit binariū super eo qđ fit ex binario in a.et binarius in m per nonā primi facit c:ergo c bis cōtinet m.sed et per decimānonam septimi d cōstat ex l et m:⁊ g cōstat ex c et d.ergo g cōtinet ter m.⁊ insuper l tres scʒ eius partes.eritq: g ad m secūda multiplex suppartiens.et hunc in modū probabis l in n cōstituere g.⁊ per decimānonā septimi m n constituere e.⁊ h cōtinere n secundū m.et insup m quattuor scʒ partes n.et ita cōsequenter inuenies multiplicium denolationes et ab eodē numero suppartientiū partes numeratas:qđ est propositū.



45 ¶ Si due diuerse superparticulares coniūgantur composita aut erit dupla aut superparticularis aut superpartiens.

¶ Sint a b c d e f quotlibet per ordinē supparticulares:dico q si due quelibet simul iungant composita esse aut duplā aut superparticulare aut suppartiētem. nam si a et b sesqualterā et sesquitertiā coniungis cōposita erit dupla.nā constituta dupla:inuenis per primā quinti sesquitertiā proportionem qua abundat dupla super sesqualterā.constituet igitur due prime duplā. sed si cum a aut c aut d aut e aut f cōiunxeris:q: per tricesimāseptimā huius quelibet est minor b cōposita proportio erit illa dupla minor et ideo nō multiplex. est enī dupla per eandē tricesimāseptimā huius multiplicū minima:igitur cōposita proportio aut erit supparticularis aut superpartiēs:quod est propositū.



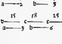
46 ¶ Superparticularem inuenire:cum qua quotlibet superparticularium quelibet:superparticularem componant.

¶ Sint a b c quotlibet numeri ab vnitate proportionales:et sit d primus ad a qui idē etiā per vicesimāseptimā quarti erit primus ad b et c ⁊ cōiungatur d cuilibet eorum et proueniāt compositi e f g.eritq: per nonā tertij quilibet eorū ad quēlibet eorū et quoslibet alios illius ordinis proportionaliū primus. sumo iterū cōtinue proportionalē post primos qui sit h et per vicesimāquintā tertij minimū quē numerant d e f g qui sit k: qui per vicesimāseptimā tertij erit primus a d h.sit itē per vltimā tertij l multiplex ⁊ m multiplex k.addatq: l super m q̄tum est d.deinde addo sigillatim ad l numeros a b c et proueniāt cōpositi n p q:manifestū est l esse superparticularē ad m. nā ei superaddit suā partem scʒ d:sed et n ei superaddit d ⁊ a quod est e.et p ei superaddit d et b quod est f.⁊ q ei superaddit d et c quod est g.⁊ per vicesimātertiam primi e f g quilibet est pars m:q: est pars k.igitur n p q pariter et l sunt supparticulares ad m.constare ergo potest propositum.



47 ¶ Data superparticulari:quotlibet alias inquirere quarum quelibet cum eadem:superpartientem efficiat.

¶ Sit a denominās partem date supparticularis.sumo ab vnitate cōtinue proportionales quorū ipse vnus qui sint a b c.dico proportionē superparticularē dictā ab a cum supparticulari cuius pars denominat ab b vel ab c constituere superpartientē:qualiū presens proponit inuentionē.nam cōposita ex proportione supparticulari denoīata ab a et denoīata ab b habet in denoīatione suīmā et partes q̄ dicūtur ab a ⁊ ab b per octauā huius. q̄quidē partes per quartā huius denominātur ab eo qđ fit ex a in b qui sit d sed ille per decimātertiā huius nō constituunt partē:ergo cū propositio cōposita ex demōstratione penultime nō sit multiplex nec supparticularis:q: partes composite non cōstituunt partē vnā.relinquit ergo compositā esse superpartientē: ⁊ ita de qualibet alia.

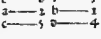


48 ¶ Omnis supparticularis cū qualibet suppartiēte:cōstituit proportionē tripla minorē

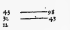
¶ Nam dupla cū sesqualtera que per tricesimāseptimā huius est maxīa superparticulariū cōponunt per correlariū vicesimetertie huius triplā: sed oīs proportio suppartiens est minor proportione dupla igitur quelibet proportio superpartiēs cū maxima supparticulari aut minori supparticulari q quintā quinti cōstituet proportionē tripla minorē:quod est propositū.

49 ¶ Datā proportionē que tripla minor sit:in supparticularē ⁊ suppartientē partiri.

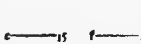
¶ Sit primo supparticularis quecunq: data que hoc modo diuidi petatur.capio a ⁊ b minimos terĩos quidē minorē ⁊ b maiorē inter quos cōsistat.qui per tricesimāseptimā huius erunt numeri in continua serie numerorū sumpti:sola q: vnitate distātes.sitq: c cōpositus ex eis cui addatur a et proueniat d: quoquidē maior vnitate sit e ⁊ ducātur a et b in d et proueniāt f et g.eritq: per octauā secūdi proportio g ad f ea que b ad a. Itē duco a in e ⁊ proueniat h:addetq: h super f per nonā primi q̄tum ē a:et a est positus est numerare f secundū d:igitur h ad f est proportio supparticularis. Item q: b est maior vnitate per decimā primi g addit super f q̄tum est d.ergo g addit super h minus d quantū est a:sed substracto a ab d manet c.igitur g addit super h quantū est c ⁊ per nonam ⁊ decimā tertij c est primus ad g.erit itaq: g ad h proportio superpartiēs:quare proportio supparticularis assignata que est g ad f in duas diuisa est:scʒ h ad f supparticularē et g ad h superpartientē quod est propositū quo ad hoc. Secundo sit superpartiēs inter a et b minimos terminos:sitq: b maior terminus et ducatur b in se et in a et proueniāt c ⁊ d. eritq: per septimā secundi proportio c ad d ea suppartiēs que b ad a. Item addo a ad d et proueniat e.per decimā primi numerabit e secundū numerū vno maiorē b.quare e ad d est superparticularis.et quia per decimam tertij e est primus ad b:ergo per vndecimā eiusdam est etiam primus ad c.et cum differentia c ad e non sit vnitas sed vnitate maior:ergo non erit supparticularis. Relinquitur igitur c ad e proportionē esse superpartiētem:quare suppartiēs assignata c ad d diuisa est in duos:scʒ e ad d superparticularē ⁊ c ad e superpartiētem quēadmodū erat propositū. Tertio sit





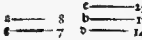


inter a et b ꝓportio dupla que qꝛ vt demõstratum est in quadragesimaquīta huius constat ex sesqual tera ⁊ sesquitertia substrahat̄ per primã quinti ꝓportio supparticularis c ad d quecūꝗ minor sesquitertia a ꝓportione a ad b:sitq̄ residua e ad f qua abūdat a ad b super c ad d. ⁊ qꝛ maior est ꝓportione sesqualtera que est maxīa superparticulariū neq̄ est multiplex: qꝛ ꝓportio a ad b est minima multiplicium que nõ resoluitur in multiplices. relinquitur ergo ꝓportionē e ad f esse suppartiētem. et qꝛ c ad d ⁊ e ad f cõstituunt ꝓportionē a ad b constat ꝓportionē duplam in supparticularē ⁊ superpartiētem esse diuisam. Nūc arto sit inter a et b quelibet ꝓportio a dupla ad triplã cõstituta: sitq̄ inter c et d proportio cõposita ex dupla ⁊ sesquitertia si proportio a ad b est minor ꝓportione c ad d. ergo substracta ꝓportione sesquitertia a ꝓportione a ad b remanebit proportio minor dupla: sed maior sesqualtera. quare illa residua erit superpartiēs: ⁊ sic ꝓportio a ad b esset cõposita ex supparticulari vt sesq̄tertia et suppartiente atq̄ in eas diuisibilis. ⁊ si a ad b sit equalis c ad d aut maior: qꝛ ꝓportio addita duple in ꝓportione a ad b: erit minor sesqualtera cū dupla ⁊ sesqualtera per correlariū vicesimetertie hui⁹ constituāt triplã. et sesqualtera addita sesqualtere minus cõstituat q̄ dupla cū sesquitertia qꝛ sesqualtera et due sesquitertie plus sint q̄ sesqualtera sesquitertia ⁊ sesquioctaua. at per primã quinti he cognoscitur equari duple ⁊ sesqualtere: ⁊ illi duple et sesquitertie. ergo substracta sesqualtera de proportiõe a ad b remanebit ꝓportio minor dupla: sed ⁊ maior sesqualtera. quare suppartiēs. esset itaq̄ proportio a ad b in ꝓportionē supparticularē sesqualterã et superpartiētem quomodo propositū est secabilis: quod est propositum.



ℭ Maximã superpartientē inuenire: que ex duabus supparticularibus ꝓducitur. 50

ℭ Sit a ad b ꝓportio sesqualtera et c ad d ꝓportio sesquiquarta: sitq̄ e ad f ꝓportio ex his cõposita dico proportionē e ad f esse maximã suppartiētem que ex duabus supparticularibus ꝓducitur. nã qꝛ dupla ex quadragesimaquīta huius producit̄ ex sesqualtera ⁊ sesquitertia que sunt maxīe supparticulares: ergo ꝓportio e ad f est minor ꝓportione dupla. sed ⁊ eadē maior est sesqualtera: qꝛ ex ea cum altera cõposita sit. ergo e ad f est ꝓportio suppartiens: sed ⁊ quelibet minor supparticularis cū proportione a ad b sesqualtera: aut c ad d sesquiquarta p quintã quinti minorē ꝓportionē cõstituet q̄ e ad f. est igitur e ad f maxima suppartiēs ex duabus supparticularib⁹ ꝓducta: quod est ꝓpositum.



ℭ Superpartientē inuenire: que in duas superparticulares diuidi non possit. vnde patet qualibet superpartiente aliam esse maiorem. 51

ℭ Sit b ad a maxima ꝓportio suppartiens per p̄cedentē cognita: que ex duabus supparticularibus ꝓducta sit ⁊ differētia b ad a sit c: manifestū est a esse maiorē c suis quidē partibus. capio itē numerū d vno minorē b: ⁊ tunc ꝓportio a ad c: qꝛ a maiore parte denõiatur maior est q̄ proportio b ad d. addo ergo d cū b et fiat e: manifestū est e ad b esse suppartientē cum cõtineat b ⁊ d eius ptes. et per secundã partē decimequīte secundi erit maior ꝓportio e ad b q̄ b ad a. et qꝛ ꝓportio b ad a diuidit̄ in maxīas supparticulares constituētes suppartiētem vt ex precedenti cognoscit̄ et suppartiens e ad b sit maior superpartiēte b ad a. nõ diuidet̄ ergo suppartiens e ad b in duas minores q̄ b ad a: neq̄ in easdem in quas diuidit̄ b ad a. relinquit̄ ergo in nullas duas suppaeticulares superpartiētē e ad b posse diuidi quod est propositū. Et correlariū ex modo demõstrationis cognoscit̄.

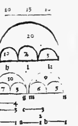
ℭ Sola multiplice qualibet non potest sumi minor: et sola superparticulari qualibet non potest sumi maior. 52

ℭ Dico primo qualibet multiplice posse sumi maiorē. nã per tricesimãseptimã huius oēs numeri ad vnitatē ꝯparati cõstituunt multiplices et tãto maiores quãto ab vnitate remotiores ⁊ series nūerorū in imensum euadit. igit̄ qualibet multiplice potest sumi maior. Scđo dico q̄ nõ qualibet multiplice põt sumi minor. nã per eādem quãto numerus ꝓpinquior vnitate fuerit: tanto ille ad vnitatē minorē cõstituit multiplicē. at descēdendo nõ abitur in infinitū. non igit̄ qualibet multiplice est dare minorē qđ in aliis minime quēadmodū monstrabit̄ accidet. Tertio dico qualibet supparticulari esse minorē Nã pars per primã huius que a minori numero denolatur maior est: et quãto a maiori minor. et qꝛ series numerorū in infinitū succrescit: nõ dabitur pars adeo parua qua minor dari non possit. qualibet igitur supparticulari potest dari minor. Quarto dico nõ qualibet supparticulari esse maiorē. naꝫ pars que a numero ꝓpinquiore vnitati denominat̄ maior est: ⁊ qꝛ nõ contigit numerū in infinitū decrescere dabit̄ ergo tandē supparticulariū maxima. at vtriusq̄ oppositū vt iam ostēsum est in multiplicibus accidebat. Quīto dico qualibet suppartiente esse maiorē. hoc ex correlario p̄cedentis notū est. Sexto dico omni suppartiente esse minorē. nam quacūq̄ data v verbi causa supbipartiēte tertias sumo aliã a totidē partibus: denominatis a maiore numero quē nõ numerēt: vt supbipartientē quītas q̄ quidē qꝛ a totidē minoribus ptibus denominat̄: neq̄ pluribus erit minor suppartiente data. qua supbipartiente quītas supbipartiens septimas minor est et hac supbipartiens nonas: sicq̄ cõsequent̄ fm crementum numerorū in finitū: quod est ꝓpositum. Potest ⁊ id vltimū ostendi ex tertia parte presentis: adiuuante quadragesima nona huius.

ℭ Quelibet due suppartientes coniūcte: proportionē quadrupla minorē constituēt. 53



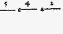
ℭ Sit inter a et b proportio superpartiēs: itidem inter b ⁊ c. dico proportionē a ad b et b ad c simul: minorē quadrupla constituere proportionem. nam a est minus duplo b: et b similiter minus duplo c. ergo a ad c per quintam quinti est minor proportione quadrupla: que per octauam huius ex duabus duplis constat. est ergo clarum propositum.



54 ¶ Datã proportionẽ que quadrupla minor sit in duas superpartientes diuidere.

¶ Sint date ꝓportionis minimi termini a et a b: qui coniuncti faciant d. sitq; e maior d uno qui coniuncti faciant sicut addatur equale d. sitq; totus f g: ducaturq; a in f g et ꝓueniat h: ⁊ ex a b in eũdem fiat h k l. patet igitur ꝙ ex b in f g fit k l: et ex b in g fit k. quare ex b in f fit l. sit item e triplus ad a et ex e in g fiat m n: sitq; n equalis k. per octauam secundi erit proportio h k l ad h tanꝙ a b ad a. ⁊ quia a b per hypothesim est minus ꝙ quadruplũ a: est ergo b minus ꝙ triplum a. quare minus ꝙ e. ⁊ quia g est equale d et n equalis g: constat m esse equalem vel multiplicem ad d per duodecimã primi. Item qꝛ d et e sunt contra se primi: ergo per nonam tertii f erit ad vtrunq; primus. et per eandẽ f et g simul ad d primus. et qꝛ a est minor d ⁊ ad ipsum primus per eandẽ nonam: quod fit ex a in f g scꝫ h non numerabitur per decimã eiusdem ab d. et qꝛ d numerat k ⁊ d nõ numerat h: ergo k per vicesimãtertiam primi nõ numerabit h. et quia f g maius est ꝙ triplum d: ergo maius erit h ꝙ n: maius ergo ꝙ k. erit ergo k partes h. et eadem ratione qꝛ a b est minor ⁊ primus ad f nõ numerabit f quod fit ex a b in f g: scꝫ h k l. et qꝛ f numerat l: ergo l nõ numerabit h k l: quare neq; h k. ⁊ qꝛ per nonã primi l est quantum k bis et b. ⁊ n est equalis k et m equalis vel maior d ⁊ maior b et h maior m n: erit h k maior l. erit igitur l partes eius. constat itaq; h k l ad h esse superpartientẽ ⁊ h k l ad h k etiam esse superpartientẽ: in quas diuisa est proportio que est inter a et a b: factumq; esse propositum.

55 ¶ Omnis multiplex superparticularis addit super similem multiplicẽ: superparticularẽ a numero qui fit ex ductu numeri multiplicis in numerũ partis denominatã.

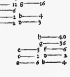


¶ Sit b ad a proportio multiplex superparticularis: sitq; c ad a similis multiplex. dico proportionẽ b ad a addere super proportionem c ad a superparticularem denominatam a numero qui fit ex ductu numeri multiplicis in numerũ denominantẽ partis superparticularis. Sit enĩ d quo abundat b super c et denominãs multiplicis sit e ⁊ denominans superparticularis sit f: manifestũ est ergo ꝙ a erit in c secundũ e: ⁊ d in a secundum f. fiat ergo g ex e in f: eritq; per vicesimãtertiam primi d in c secundũ g. quare b continebit c et partem denominatã ab g. continet igitur proportio b ad a proportionẽ superparticularem denominatã ab g numero qui fit ex ductu e denominãtis multiplicis in f numerũ denominantem partis superparticularis: quod est propositum.

56 ¶ Omnis multiplex superpartiẽs cuius multiplicis numerus partes numerat: addit super eandem multiplicẽ: superparticularẽ ab vna partium denominatã.

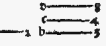
¶ Sit ꝓportio b ad a ꝓportio multiplex superpartiens: sitq; d numerus denominãs multiplicẽ scḋm quẽ sit sumptus numerus partiũ b ad a. dico ꝓportionẽ b ad a addere super similẽ multiplicẽ: superparticularẽ denominatã ab vna illarum partiũ. Sumo enĩ c ad a similẽ multiplicẽ. ⁊ qꝛ b maior est c: sit f quo abundat b super c. qꝛ enĩ f est partes a sumpte scḋm d et denominate ab a: ⁊ a est pars c denominata ab d. et cũ ex d in a fiat c ex f in a fiet c. est ergo f pars c denominata ab a. continet igitur b ad a proportionem superparticularẽ super ꝓportione c ad a denominatã ab vna partium superpartiẽtis: quod erat demonstrandum.

57 ¶ Multiplicẽ superpartientẽ inuenire: que super totã multiplicẽ addat superparticularem: cũ sint numerus partiũ ⁊ numerus denoĩans multiplicẽ dati cõmensurabiles.



¶ Proponit hec: ꝙ si dati numeri quorũ vnus denoĩat multiplicẽ et alter est numerus partiũ simul multiplicis superpartiẽtis: sint adinuicẽ cõmensurabiles inuenire multiplicẽ superpartiẽtem que super similem multiplicẽ addat superparticularẽ. Sint pmo a numerus denominãs multiplicẽ ⁊ b numerus partiũ dati cõmensurabiles. sitq; b numerus sumptus scḋm a et per ꝑcedentẽ factum erit ꝓpositum. Sint scḋo a ⁊ b cõmensurabiles. sed b sit pars a et adiuuãte ꝑcedente ꝑ vicesimãtertiam primi cõcludes ꝓpositũ. Sit tertio a pars b dicta ab c: sumo quẽlibet numerũ maiorẽ a: quẽ tamen nõ numeret qui sit d: et duco c in d et ꝓueniat e. ⁊ qꝛ c in a facit b: erit e maior b. et qꝛ ꝑ septimã secũdi b ad e sicut a ad d et a nõ numerat d. igitur neq; b numerabit e. duco a in e ⁊ ꝓueniat f: cui adiuncto b fiat g. dico ergo g ad e esse superpartientẽ que queritur. nam g cõtinet e secundũ a et insup b partes e. ⁊ qꝛ b est pars f ꝙ e multiplex sit ad c: ⁊ a in c faciat b. addet igitur g sup f multiplicẽ ad e denominatũ ab a: numerũ b eius partẽ: quod est ꝓpositum. Quarto sint a ⁊ b cõmensurabiles: sed neuter alterũ numeret. ⁊ sit c maximus eos numerãs: numeretq; c numerũ b scḋm d. capto e quẽcunq; numerũ maiorẽ c: quẽ tamẽ c nõ numeret: quẽ duco in d et ꝓueniat f qui erit maior b: neq; ab eo numerabitur. dico ergo vt in precedenti parte ĩmediate mõstratũ est: ꝓportionem superpartientẽ denominatã ab a ⁊ a partibus dictis ab f sumptis secundũ numerum b: addere super multiplicem dictam ab a: superparticularẽ. hoc vt in precedenti parte monstratur: sicq; totum construitur propositum.

58 ¶ Multiplicẽ superpartientẽ cuius multiplicis numerus et numerꝰ partes numerãs fuerint adinuicẽ primi: super similẽ multiplicẽ: superpartientẽ addere necesse est.

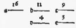


¶ Sit a numerꝰ multiplicis et b numerus partiũ superpartiẽtis: sintq; a ⁊ b numeri adinuicẽ primi dico multiplicẽ superpartientẽ denominatã ab a et partiũ b: super similẽ multiplicẽ addere proportionẽ superpartientẽ. sit enĩ c denominãs partes b manifestũ est c esse maiorẽ b: neq; b ipm numerare duco ergo a in c ⁊ fiat d per vicesimãprimam tertij b nõ numerabit d. addo igitur b super d et fiat e: qꝛ enĩ e continet c secundũ a. et insuper partes c sumptas secundũ b est proportio e ad c multiplex superpartiens denoĩata ab a et partium b. sed ⁊ proportio d ad c est multiplex dicta ab a: et e addit super d

numerū b qui monstratus est partes d. constat itaq; ꝓportionē multiplicē superpartientē dictā ab a: et partiū b addere super similē multiplicē: vt ꝓponebat̄ ꝓportionē suppartientē: qd est propositū.

¶ Sola superparticularium sesqualtera multiplicē superparticularē procreat. 59



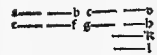


¶ Esto a ad b sesqualtera et b ad c similiter. manifestū est ꝓportionē a ad c compositā esse ex duabus sesqualteris et a continet b ⁊ eius medietatē que sit d: et b cōtinet c ⁊ eius medietatē que sit e. et quia per quintā secundi d ad e sicut b ad c: ergo d continet e ⁊ eius medietatē. d ergo et e simul tantū sunt q̄tum c et vna pars dicta ab c. cōtinet ergo a numerū c bis: et vnā eius partē. q̄ a cōtineat c et d e totā differentiā a ad c: quare due sesqualtere cōstituunt multiplicē superparticularē. Secundo ostendit nullā aliam supparticularē duplicatā constituere multiplicē superparticularē. et sūto a b c ꝓportionales alie supparticulares: vt ꝓportio a ad c sit ꝓportio a ad b duplicata. a cōtinet b et partem eius que sit d: que quidē bis sumpta minuit a toto aut seipsa semel si esset tertia: aut bis si quarta: aut pluries s̄m q̄ minor pars fuerit. et similit̄ b continet c ⁊ similē partem eius que sit e. et q: d ad b sicut e ad c: ergo d ad e sicut b ad c. cōtinet ergo d semel e et eius vnā similē partem: ergo d et e simul minus sunt q̄ c. quare a ad c nō est multiplex sed et cū d ⁊ e sint contra se primi vt supponim⁹: d et e simul per nonā tertij est primus ad e. sed et per vndecimā eiusdē c etiam erit primus ad d et e simul. ergo d et e simul nō numerabūt c. est ergo a ad c ꝓportio suppartiens: quod est ꝓpositum.



¶ Multiplex ꝓportio in aliq̄t equales ꝓportiones distribui non pōt p̄ter multiplices. 60

¶ Sit ꝓportio a ad b multiplex que diuidatur in quotlibet ꝓportiones equales q̄ sint a ad c: c ad d et d ad b. q: enim b ad d ⁊ d ad c et c ad a sunt continue ꝓportionales et b primus per hypothesim numerat a vltimum: ergo per decimātertiam quarti b numerabit d secundū. quare ⁊ d numerabit c et c itidem a. diuisa est igitur a ad b in ꝓportiones multiplices: quod intēdebatur.



¶ Nulla supparticularis ꝓportio in aliquot equales ꝓportiones est diuisibilis. 61

¶ Sit a ad d quelibet ꝓportio superparticularis: que diuidat̄ si possibile est in ꝓportiones equales a ad b: b ad c: et c ad d. capio e f g h ꝓportiones in minimis terminis ꝓportionis a ad b: et per equam proportionalitatē que proportio a ad d ea est e ad h. sed a cōtinet d et eius partē: igitur et e cōtinebit h et eius partē que sit l: que si fuerit numerus cū l: numerabit h ⁊ etiā e. ergo h et e nō erunt minimi quod per quintā quarti repugnat hypothesi. alioquī si l: est vnitas est pars denoīata ab h. addo ad h vnitatē: sitq; cōpositus k: eritq; que proportio a ad d ea l ad h. ergo per duodecimā quarti quot medij ꝓportionales intercidūt inter a et d: totidē ⁊ inter l et h sola vnitate distātes: qd est īpossibile. Ex hac cognoscit̄ tonus in musica qui ex sesq̄octaua ꝓportione nascitur: in duo equa parti nō posse.

¶ Superpartientē proportionē que duplicata suppartientē constituat: inuenire. 62

¶ Sumo quālibet proportionē que minor sit dupla quā per quinquagesimāquartā huius partior in duas superpartientes quarū minor si dupletur efficietur proportio minor dupla: quare qualibet multiplice. que q: per precedentē nō erit superparticularis alioquin superparticularis in duo equa secaretur: constat eam esse superpartientē: factumq; esse propositum.

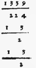
¶ Multiplicē supparticularē q̄ ex duab⁹ suppartiētibus equalib⁹ ꝓponat̄: reperire. 63

¶ Sumo secundū exigentiā decime octaui quadratos a et b p̄ter primos quorū a addat super duplū b vnitatē manifestū est ꝓportionē a ad b esse multiplicē superparticularē. at ex illa decima facile cognosces proportionē lateris a ad latus b esse superpartientē. sumo ergo secundū exigentiā correlarij quarte sexti mediū proportionale inter a et b: eritq; per tertiā eiusdē sexti proportio a ad c tanq̄ proportio lateris a ad latus b. quare constat proportionē multiplicē superparticularē a ad b compositā esse ex proportionibus a ad c et c ad b duabus sez equalibus suppartientibus: qd est propositū.

¶ Superpartientē inuenire que duplicata multiplicē superpartientē constituat. 64



¶ Sit a quilibet impar et b proximus par maior cuius medietas sit c. capio superpartientē sumptā a partibus denominatis ab a ⁊ numeratis ab c: quam duplicatā dico esse petitam. nam si illa in se ducatur proueniet numerus et partes numerate ab a ⁊ a quadrato c qui sit e: et denominate a quadrato a qui sit d. sed cum a ⁊ c sint contra se primi alioquin a et b cōmunicarēt. ergo per vndecimā tertij a est primus ad e: ⁊ per nonā eiusdem a et e simul sunt primus ad a. quare a et e simul per vndecimā eiusdē sunt primus ad d. ergo partes numerate ab a et e nō numerabūt d. quare ꝓportio superpartiēs que assignata erat duplicata cōstituit multiplicē superpartientē. Q̄ si hec demōstratio tibi subobscura videtur pro hac ⁊ sequētibus declarationē accipe. q: enī in presenti superpartiēs inuenta erat superbipartiēs tertias que denominat̄ ab vno ⁊ duabus tertiis. duc ergo denominationē superbipartientis tertias per octauā huius in denominationē superbipartiētis tertias sez ducēdo primo duas tertias in duas tertias. et per quartā huius prouenit quattuor none. secūdo duas tertias in vnū ⁊ ꝓuenit due tertie. tertio vnū in duas tertias et iterum prouenit due tertie. ⁊ quarto vnū in vnum: et ꝓuenit vnum: habebisq; quattuor nonas duas et duas tertias ⁊ vnū: sed due ⁊ due tertie: id ē quattuor tertie faciunt vnum integrū et vnam tertiam: quod quidē vnum alteri vni additū constituit binarium et vna tertia est tres none: quod per secundā huius facile cognoscas. que siquidem tres none aliis quattuor nonis primo inuētis addantur fiunt septem none. Patet itaq; proportionē superbipartientē tertias duplicatam: constituere duplam et superseptupartientē nonas que est multiplex superpartiens: vt proponebat propositio: quod est propositū declaratum.

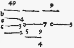


65 Multiplicem superparticularem inuestigare: que multiplicem superparticularem duplicata producat.



Capio a numerū quēcunq̧ quem duco in se ⁊ prouenīat b cui addo vnitatē: sitq̧ totus c manifestū est proportionē c ad a esse multiplicē superparticulare. que si in se ducatur est tātum q̄tum a in se ⁊ in partē bis et pars in se: sed a in se ⁊ in partem bis numerū producit: et pars in se producit partē. igiť quod producitur est numerus et pars. erit itaq̧ proportio composita multiplex superparticularis. Posses item probare vt quinquagesimānonam huius.

66 Multiplicem superparticularem inquirere: que bis sumpta multiplicem superpartientem componat.



Sit quilibet impar a et b proximus par ⁊ eius medietas sit c. sumo multiplicē superparticularem cuius multiplicis numerus sit c et pars dicta ab a. que proportio sit d ad e: dico proportionem multiplicem superparticularē d ad e bis sumptā constituere multiplicē superpartientē. nam si hec in se ducatur ꝓueniet quadratus c et partes similes sumpte fm b ⁊ pars a quadrato a dicta. ille autē partes vnum constituūt et vna superfluit cū illis. et q: ille due partes per duodecimā huius vnā non cōstituunt productum erit numerus et partes. quare proportio composita erit multiplex superpartiēs. ⁊ in proposito esset quincupla superquadripartiens nonas.

67 Multiplicem superpartientem perscrutari: que duplicata multiplicem superparticularem componat.

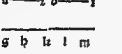


Sumo per sexagesimātertiam huius superpartientē que duplicata multiplicē superparticularē cōponat et numerꝰ denominās partes sit a ⁊ numerās sit b et vno maior q̄ a sit c atq̧ c ducatur in a: et producto addatur b. sitq̧ totus d manifestū proportionē d ad a esse multiplicē superpartientē cuiꝰ numerus denominās multiplicis est c et denominās partiū est a ⁊ numerus earū est b: quā duplicatā dico esse multiplicē superparticularē. nam denominatio ipsius in se ducta producet numerū et partē quod vt in precedentibus videre promptum est.

68 Multiplicem superpartientem: ex qua geminata multiplex superpartiens proueniat: demum restat inspicere.

Queratur per sexagesimāsecundam huius superpartiens que geminata multiplicē superpartientē constituat: qua inuenta vt in precedente procedendū est.

69 Datam proportionem in proportiones: quarum quotlibet sint superparticulares equales redigere.



Sint minimi termini date ꝓportionis a et b: sitq̧ c numerus fm quem sumēde sunt superparticulares equales. deinde maior c ducatur in a et in b ⁊ fiant d et e: its tamen vt inter d ⁊ e sint plures numeri q̄ vnitates in c et ꝓximus post d qui erit maximus eorū sit f. manifestū est ꝓportionē f ad d esse proportionem superparticularē ⁊ minimā omnium que continue sunt inter numeros ab d vsq̧ ad e: q: denominata est a minore parte. continuo proportionē f ad d vno plures q̄ sit numerus c: sintq̧ g h k l m: eritq̧ proportio h ad m composita ex ꝓportionibus f ad d sumptis secundū numerum c. ⁊ quia d per decimānonam tertij est aliquoties in h sit e toties in n manifestū est h ad n eē vt d ad e. quare vt a ad b. constat ergo proportionē a ad b esse diuisam in ꝓportiones quarū aliquot sumpte erunt equales superparticulares secundū numerum assignatū: quod est propositū.

70 Propositis quotlibet equalibus terminis ex illis tonoē in ordine duplos: atq̧ ex illis triplos procreare: atq̧ ex prius inuētis tonoē in proxima multiplicitate cōtinue ꝓportionales producere. itemq̧ ex illis similes elicere superparticulares.

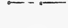
Figura equalitatis quotcunq̧ terminorum equalium.

SENARIA						16	16	SEPTENARIA					16	16	16
EQUALITAS				4	4	4		equalitas			4	4	4		
Equalitas	A	1	1	1	1	1	1	tes.	1	1	1	1	1	1	1
Dupl.	B	1	2	4	8	16	32		1	2	4	8	16	32	64
Tripl.	C	1	3	9	27	81	243		1	3	9	27	81	243	729
Quadrupl.	D	1	4	16	64	256	1024		1	4	16	64	256	1024	4096
Sesquiteri.	E	32	48	72	108	162	243		64	96	144	216	324	486	729
Sesquitertii.	F	243	324	432	576	768	1024		729	972	1206	1728	2304	3072	4096
Sesquiquarti.	G	1024	1280	1600	2000	2500	3125		4096	5120	5400	8000	10000	12500	15625
			H	K	L	M	N			H	K	L	M	N	O

¶ Precepta sunt hec.
1 Primum.
2 Primum secundũ.
3 Primũ scdm bis: tertiũ

Figura trine equalitatis:

			O	P							O	P			O	P
Trina e	A	1	1	1	qua	2	2	2	li	3	3	3	tas.	4	4	4
Dupli.	B	1	2	4		2	4	8		3	6	12		4	8	16
Tripli.	C	1	3	9		2	6	18		3	9	27		4	12	36
Quadrupli	D	1	4	16		2	8	32		3	12	48		4	16	64
Dupli cõuersi'	E	4	2	1		8	4	2		12	6	3		16	8	4
Sesqualteri.	F	4	6	9		8	12	18		12	18	27		16	24	36
Tripli cõuersi.	G	9	3	1		18	6	2		27	9	3		36	12	4
Sesquitertiũ.	H	9	12	16		18	24	32		27	36	47		36	48	64
Quadrupli cõuersi.	K	16	4	1		32	8	2		48	12	3		64	16	4
Sesquiquarti.	L	16	20	25		32	40	50		48	60	75		64	80	100
			M	R			M	R			M	R			M	R



¶ Pythagorici/Magi/Prisci sacerdotes atq; qui p̃cipue de rebus agunt diuinis admirãtur equalitatẽ pariter ꝛ trinitatẽ in suis archanis in imagine numeroꝝ venerãtur taciti: tanq̃ rerum omniũ prĩcipia: a quibus oĩs rerũ profluit ꝓportio: ꝓportionũ nexus: oĩsq; admirabilis harmonia et in quã tandẽ reuocatũ eunt oĩa. Propter ergo mysteria priscoꝝ qḋ autor generalius intẽdit: primũ in trina demõstrãdum ẽ equalitate. ad qḋ q̃uirẽ rite peragendũ tria satis sunt vbiq; veteꝝ p̃cepta a Diuo nobĩ annotata Seuerino. Primũ est: Primũ. Scdm est: Primũ/scdm. Tertiũ est: Primũ/scdm bis/tertiũ. Sint ergo a o p tres termini equales quicũq; vt monadũ/dyadũ/triadũ aut cuiuscũq; alterius nũeri voles. Et ꝑ primo p̃cepto capioq; primã vnitatẽ quã colloco sub p̃ma sitq; b. deinde ꝑ scdo p̃cepto capio primã ꝛ scdam simul: quas colloco sub scda. sitq; m et deĩde tertio p̃cepto: capio primã ꝛ scdã bis: et tertiã semel: quas colloco sub tertia sitq; n. dico b m n ꝯtinue ex equalitate natos duplos. Nã cũ a prima vnitas ꝛ b sint idẽ: et prima et scda vnitas fiat duplũ ad primã vnitatẽ a et p̃ma ꝛ secunda vnitas sint m: ergo nũerus m duplus ẽ ad b: et cũ scda vnitas bis sũpta equet m et sĩr prima ꝛ tertia simul equentur m ꝛ n sit scda vnitas bis et p̃ma ꝛ tertia semel. ergo n duplus est ad m. sunt igit̃ b m n ꝯtinue dupli ab equalitate scꝫ quẽadmodũ dictũ est ꝓxime geniti. ¶ Potes idẽ mõstrare ꝑ vicesimã et sextã secundi. Nã q: a ad o: vt o ad p. ergo ꝑ vicesimã secundi o et p ad a ꝛ o vt o ad a. et q: o ꝛ p ad a et o: sicut o ad a. ergo ꝑ sextã eiusdẽ secundi o p et a o: ad a ꝛ o sicut o et a ad a. at o p et a o simul sunt n et a ꝛ o sunt m et a est idẽ b. igit̃ b m n cõtinue ꝓportionãtur: sed m ad b cognit⁹ est duplus igit̃ et n ad m duplus. Et in oĩbus sequẽtibus hic argumẽtandi modus ẽ efficax. Et q̃uis q̃ trina capiet̃ termĩoꝝ equalitas: eadẽ valeãt argumẽta. ¶ Scdo dico ex b m n duplis cõtinue ꝓcreari triplos. capio equale b et colloco sub b in tertia linea sitq; c. deinde capio b m siĩ ꝛ colloco sub m sitq; m tertie linee rursum capio b m bis et n ꝛ colloco sub n: sitq; suo modo n. dico c m n tertie linee eẽ triplos. Nã per vicesimã scdi adiuuãte sexta eiusdẽ c m n sunt cõtinue ꝓportionales: sed et q: c equatur b ꝛ m supius duplus ẽ ad b: igit̃ b et m supius sunt triplus ad b. sed b ꝛ m superi⁹ sunt m ĩferius: igit̃ inferius m ad c tripl⁹. quare n ad idem m etiã triplus. sunt igit̃ c m n cõtinue tripli. et eisdẽ preceptis ꝛ demõstrationib⁹ ex triplis nascẽtur quadrupli. ex quadruplis quĩcupli. ꝛ ex cõsequẽtibus hoc pacto multiplices oẽs quilibet ex ꝓximo minore. ¶ Tertio dico ex multiplicib⁹ cõtinue nasci supparticulares. vt ex duplicib⁹ sesqualteri ex triplis sesq̃tertiũ. ex quadruplis sesq̃quarti. ꝛ ita ꝯsequẽtes supparticulares per ordinẽ ex naturalit̃ ꝯstitibus multiplicib⁹. Conuerto duplos q̃ reperti sunt: sintq; conuersi e m n: eritq; e ad m duplus et m ad n duplus: quare m dimidiũ e. Capio equale e qḋ sit f ꝛ colloco sub e. deinde capio e m simul et colloco inferius sub m: sitq; m ĩferius. rursus capio e m bis ꝛ n simul: et colloco inferi⁹ sub n sitq; idẽ inferius n. ꝑ vicesimã secũdi adiuuãte sexta eiusdẽ f m n cõtinue ꝓportionãtur. sed cũ e ꝛ f equẽtur et m sit dimidium e: ergo e m simul cõtinet totum e ꝛ dimidiũ. quare e m ad e per diffinitionẽ ẽ sesqualt̃ sed e m simul sunt m ĩferius. ergo m inferi⁹ est sesqualter ad f. quare ꝛ n ad m etiã sesqualt̃ qḋ est ꝓpositũ. et ita eisdẽ preceptis expedi de sesq̃tertiis/sesq̃quartis/sesquiquĩtis ꝛ reliq̃s supparticularibus cõuertẽdo terĩos suaꝝ multitudinũ. Nunc idẽ superest demõstrandũ qḋ autor intẽdit sumptis quotcũq; termĩs. Quotq̃t sumpti fuerĩt termini equales: dupli cõtinue nascẽtur si cõtinuati rite vtamur supioribus p̃ceptis. p̃mo quidẽ capiẽdo primũ terminũ et collocãdo sub primo. Et scdo capiendo primũ et scdm ꝛ collocãdo sub secũdo. Et tertio capiendo primũ scdm bis et tertiũ: et collocãdo sub tertio. deĩde intelligẽdo tertiũ quartũ et quintũ equalitatẽ cõtinue sumi ẽm sumeꝝ tertiũ extremi subter collocati. et resume p̃cepta primo capiẽdo primũ terminũ trine equalitatĩ ꝛ collocãdo sub q̃rto ĩmo iam collocatũ reperies. Secũdo capiẽdo primũ et scdm ꝛ collocãdo sub quarto. Et tertio capiẽdo primũ scdm bis et tertiũ ꝛ collocãdo sub quĩto. et secundũ numeꝝ illius quinti termĩ subter collocati intelligo rursũ cõtinue tres terĩos equalitatis scꝫ quintũ sextũ et septimũ. et resumptis p̃ceptis cum quinto iam habito: perficio sextũ et septimũ inferiores termĩos et secundũ exigentiã septimi extremi intelligo rursum trine equalitatis termĩos: scꝫ septimũ octauũ et nonũ et a singulo quoq; tertio loco cõiunctim trinã equalitatẽ intelligo cuius quilibet terminus intelligit̃ secundũ numerũ extremi in singulo quoq; loco subter venientis. et si id placet in infinitũ extendi libet. ꝛ dico cõtinue collocatos eẽ duplos. id resumptis demõstrationibus quoties erunt resumpte equalitatũ trinitates: sicut et superiora facilime demonstrabis. Si cupis triplos eodem ferme modo nascẽtur de duplis. Id solum obseruandũ est vt in tertiis quibusq; locis cõiunctim capiant̃ termini triploꝝ a tribus duplis qui nas=

cuntur ex trina equalitate terminorū sumptorum secundū numerū tertū cuiusq̧ extremi triplorum. ꝛ quadrupli cōsimiliter a triplis acceptis cōtinue tribus triplis secundū exigentiā equalitatis tertū extremi triplorū et hac analogia in consequētibus multiplicibus. Et sesqualteri sesquitertū sesquiquarti ꝛ consequētes nascentur cōuersis duplis triplis quadruplis et consequētibus sumptis simili obseruantia duplis conuersis triplis quadruplis et reliquis quoties oportet a trina equalitate: sed quorū multiplicium conuersorū primum atq̧ maximū extremorū equetur singulo quoq̧ tertio superparticularū et vbiq̧ vt in precedentibus est idem demonstrandi modus.

71 ❡ Datis superparticularibus vel multiplicibus superparticularibus multiplices superparticulares et superpartientes: datis vero superpartientibus aut multiplicibus superpartientibus superpartiētes et multiplices superpartiētes procreare.

d	e	f	
4	6	9	Superparticulares
4	10	25	Multiplices sup
a	b	c	particulares

❡ Sint a b c superparticulares termini et sumatur a semel ꝛ sit e primus numerus et a semel ꝛ b semel et sit f secūdus numerus ꝛ ita secundū trine profectionis precepta vt in precedēti factū est et proueniāt d e f qui vt in precedēti erunt continue ꝓportionales. at per decimāoctauam huius proportio e ad d est multiplex superparticularis: igitur et f ad e. erunt igitur cōtinue d e f multiplices superparticulares. et eodē modo ex multiplicibus superparticolaribus nascētur multiplices superparticulares. Si vero cōuersis terminis ab c incipias per eandē decimāoctauā huius prouenient cōtinue superpartiētes. sicq̧ constat primū. Secūdum vero eodē modo patebit per decimānonam huius dato ordine superpartientiū aut multipliciū superpartientiū. nam si aggregatio a minori incepta fuerit per dictā decimānonam prouenient multiplices superpartientes. si a maiori termino: prouenient superpartiētes: sicq̧ constat ꝓpositum.
❡ Ex duabus vltimis cōclusionibus colligere potes. Ex equalitate prime nasci duplos. Ex duplis triplos. Ex triplis quadruplos: ꝛ hoc pacto de reliquis multiplicibus ꝯsequenter. Et ex multiplicibus conuersis nasci superparticulares: vt ex duplis sesqualteros. Ex triplis sesquitertios: et ita de cōsequentibus superparticularibus ex sequētibus multiplicibus. Et ex superparticularibus multiplices superparticulares: vt ex sesqualteris duplos sesqualteros. Ex sesquitertiis duplos sesquitertios: et huiusmodi in modū de reliquis. Ex multiplicibus superparticularibus itidē multiplices superparticulares: sed ex duplis superparticularibus tripli superparticulares. Et ex triplis superparticularibus quadrupli superparticulares. Ex superparticularibus et multiplicibus superparticularibus cōuersis superpartiētes: vt ex sesqualteris superbipartientes. Ex sesquitertiis supertripartiēs. Ex duplis sesqualteris ꝛ ex duplis sesquitertiis cōsimiliter superbipartiētes et supertripartiētes. Ex superpartiētibus multiplices superpartiētes: vt ex superbipartiētibus duplas superbipartiētes. Ex supertripartiētibus duplas supertripartiētes. Ex multiplicibus superpartiētibus: itidē multiplices superpartiētes: sed ex duplis triplis aut quadruplis superpartiētibus: tripli quadrupli aut quincupli superpartiētes. Ex cōuersis superpartiētibus aut multiplicibus superpartiētibus: nascitur superpartiētes. Et ex tribus preceptis hec vbiq̧ latissime patēt. ꝛ expressis quotcunq̧ voles longa serie superparticulariū cōtinue ꝓportionalium si cōtinue tria precepta tribus ꝛ tribus terminis seriei aptādo ꝓcedis: nascētur multiplices superparticulares sed solū per tres et per tres cōtinue ꝓportionales. et eodē pacto conuerso ordine nascētur superpartiētes sed solū in tribus ꝛ tribus terminis cōtinue ꝓportionales. at de his hactenus.

72 ❡ Datas superparticulares in multiplices atq̧ easdem in minores multiplices donec ad equalitatem perueniant: reducere.

l	m	n
g	h	k
9	12	16
a	b	c
9	3	1
b	e	f

❡ Jo animaduertere licet ꝓportiones in illas tantū resolui ex quibus procreantur. Quo fit vt in omnibus idē resoluendi modus appareat: in quibus idē erat modus procreandi. Sint a b c dati termini cōtinue superparticulares et sit d equalis a ꝛ primus numerus: et ab b tollatur d ꝛ remaneat e ꝛ de c tollatur d et e bis ꝛ remaneat f. dico d e f esse cōtinue ꝓportionales et multiplices. quod sint cōtinue ꝓportionales declaratur. capio enim g h k tres terminos in cōtinua ꝓportione d ad e: qui ex illis superiori aggregādi modo prouenient erunt ex precedentibus cōtinue ꝓportionales et sint l m n. et quia l ad g sicut a ad d ꝛ m ad h sicut b ad e. ꝛ ita cōsequenter igitur d e f sunt cōtinue ꝓportionales. et quia b ad a per hypothesim est superparticularis per decimāsextam huius erit e ad f similis denominationis multiplex. quare superparticulares date: sunt in suas multiplices reducte. si itaq̧ superparticulares date erant sesquitertie resolute sunt in triplas si sesqualtere in duplas quod si reducte sint in triplas eodē modo quo prius adiuuante septuagesima huius probabis illas multiplices reduci in duplas et duplas in equalitatē: quod est propositum.

73 ❡ Multiplices superparticulares in superparticulares: ꝛ multiplices superpartiētes in superpartientes resoluere.
❡ Sint a b c tres termini multiplices superparticulares. et d equalis a quod substrahatur ab b ꝛ relinquatur e ꝛ eo modo quo in precedēti substrahātur. si b ad a erit multiplex superparticularis vtriq̧ ab eodē numero denominatus per quadragesimāprimā huius factū erit ꝓpositū. et ita de superpartiētibus. Et si multiplex sit maioris denominationis nō fiet hoc prima resolutione: sed resoluemus primo in multiplices vno minoris denominationis denominatione partis semper eadē manente: donec ad hoc veniamus vt eadē sit denominatio multiplicis et partis sicq̧ quod ꝓponitur facile apparebit.

❡ Quaslibet superpartientes in superparticulares reduci est possibile.

9	15	25
a	b	c
9	6	4
a	e	f

74 ❡ Nam quia per septuagesimāprimam huius superpartientes ex superparticularibus nascūtur. Ideo sint a b c huiusmodi superpartiētes ꝛ d equetur a: substrahaturq̧ d ab b et relinquatur e ꝛ d et e bis ab c: et relinquatur f ꝛ venient per illam septuagesimamprimam superparticulares a quibus nascebantur. at non oportet id semper in prima reductione contingere quod tamen nunc cōtingebat. sed aliquādo resoluētur prima resolutione in multiplices superparticulares que per precedentē in superparticulares tandē reducentur: quo facto factū erit propositū. Aliquā in superpartiētes aut multiplices superpartientes

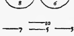
et multiplex suppartiens per precedentē reducit in suppartientē que tex reducetur in supparticularē vt si detracto d de b remaneat e quē contineat d et eius partes: vel in supparticularē si eo detracto remaneat e quē contineat d et eius partē. at si remaneat e quē contineat d et partes. qr illa detractio in infinitū fieri non pōt: semp in suppartiētes resolvatur aliqñ occurret supparticularis. factūq appa rebit propositū. Occurret dico tandē superparticularis et nō multiplex: qr ex multiplicibus non imediate suppartientes sed superparticulares per septuagesimā huius gignūtur.

¶ Datas proportiones quascunq ad equalitatem reducere. 75

¶ Nam per septuagesimātertiam huius multiplices suppartientes reducūtur in superpartiētes et multiplices supparticulares in superparticulares et per precedentē suppartiētes in supparticulares. et per septuagesimāsecundam huius supparticulares reducūtur in multiplices et multiplices in alias multiplices donec in equalitatē restitute sint. omnes igitur in equalitatē reducūtur.

Noni elemētorū Arithmetices Jordani finis.

Medietas est connectio extremorū: habitudine vtriusq ad mediū. Medietatum quedam sunt principales: et quedam principalibus collaterales. Principales sunt tres. Prima est quādo maioris/medij/ac minoris equales sunt differētie. et hec dicitur Arithmetica medietas. Secūda est quādo maximi ad mediū eadē est proportio: q̄ medij ad minimū. et hec geometrica vocatur Tertia est qñ maximi ad minimū eadē est proportio: que drīe maximi ad mediū ad differentiā medij ad minimū. et hec musica nūcupatur. Collaterales sunt octo. Prima est qñ maximus ad mediū sicut drīa minorū ad differentiā maiorum. Scda est qñ medius ad minimū: sicut drīa minorū ad differētiam maiorū. Tertia est qñ maximus ad mediū sicut drīa extremorū ad differentiā maiorū. Quarta est qñ medius ad minimū sicut drīa extremorū ad differētiam maiorū. Quinta est qñ medius ad minimū: sicut differētia extremorū ad differentiā minorum. Sexta est qñ maximus ad minimū: sicut differētia minorū ad drīam maiorū. Septima est qñ maximus ad minimū: sicut drīa extremorū ad differentiā maiorum. Octaua est quando maximus ad minimū: sicut differentia extremorum ad differentiam minorum.



¶ Si fuerint tres numeri in arithmetica medietate dispositi: erit maioris ad medium minor proportio q̄ medij ad minimum. 1

¶ Sint a b c tres numeri in arithmetica medietate dispositi quorū maximus sit a: dico a ad b minorē esse proportionē q̄ b ad c. nā per diffinitionē a ad b et b ad c equales sunt drīe: qr igitur a et b sunt vt compositi ex b et c ipsis additis numeris equalibus scz differentiis eorū. ergo per decimāsextam secundi proportio a ad b minor erit proportione b ad c: quod est propositum.

¶ In eadē medietate duo extremi cōiuncti tm̄ reddunt: q̄tum medius duplicatus. 2

¶ Nam p diffinitionē primi ad mediū et medij ad extremū equales sunt drīe: igitur p secundā primi medius est extremorū conflictorū medietas. duplicatus igitur equatur extremis piūctis: qđ est propositū.

¶ In eadē medietate quod sub extremis continetur cum quadrato differētie equale est quadrato medij. 3

¶ Nam per premissam duo extremi simul sunt tanq̄ duplus medij. Ponatur ergo duplus medij q̄ sit d diuisus p duo equalia quorū medius est vnū: et per duo inequalia q̄ sint a c extremi: et p decimānonā primi erit quadratus b vnius equalium q̄tum quod fit ex a in c cum eo quod fit ex differētia a ad b in differentiā b ad c. at qr differentie ille sunt equales: tantum ergo erit quadratū medij b q̄tum quod cōtinetur sub extremis a et c cum quadrato drīe medij ad extremū: quod est propositū.

¶ In eadem quoq medietate quadrata extremorum: duplum sunt quadrato medij et quadrato differentie. 4

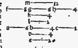
¶ Sint a b c numeri in hac medietate dispositi: sitq d quadrata a et c. dico d duplū esse quadrato medij et quadrato drīe simul. Sit enī f qđ fit ex a in c bis et quadrata b medij bis sint e: qr enī per secundā huius a et c cōiuncti tantū sunt q̄tum duplus b. et per decimāquintā primi d et f simul tm̄ sunt q̄tum quadratū totius a c: sed et per eandē decimāquintā e erit medietas d et f simul. igitur per secundā partē secūde primi e ad d et ad f equales sunt drīe. igitur per diffinitionē e hac medietate medius est inter d et f. et qr per precedentē qđ fit ex a in c semel cū quadrato drīe tantū est q̄tum b in se. igitur e addit super f duplū quadrati drīe: quare et d tantum addet sup e. quare et duplū quadrati differētie b ad a equatur d. igitur quadratus b q̄ est medietas e cū quadrato differētie b ad a est medietas d: qđ est propositū.

¶ Trium numerorū in hac medietate dispositorū duobus extremis datis: mediū reperire. 5

¶ Sint a b duo extremi in hac proportione: illos simul addo atq aggregati sumo medietatē que per secundam huius erit medius petitus: factumq erit propositū.

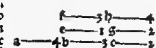
6 ¶ Si fm pportionem medii datorum numerorum ad differentiam: sumantur tres numeri in eadem medietate: erit medii illorum ad differentiam: que inter extremos pportio assignatorum pportio.

¶ Sint a b c tres numeri in Arithmetica medietate quorum maximus sit a. et sit d differentia a ad c: et e medietas que est differentia a ad b ⁊ differentia b ad c. sumo item in eadem medietate numeros f g h quorum extremorum sit pportio tanq̄ b ad e: sitq̄ f maximus. dico g ad differentiam f ad g q̄ sit l eam pportionem esse que a ad c. capio enim differentiam f ad h q̄ sit k: cuius medietas sit l. et compositus ex f et h sit m. qr enim per hypothesim b ad e tanq̄ f ad h: et b ⁊ e sunt a. igitur p sextam secundi a ad e sicut m ad h. et quia vt dictum est b ad e vt f ad h: ergo pmutatim b ad f totus ad totum: sicut e ad h detractus ad detractum. igitur per quintam secundi c ad k residuus ad residuum sicut totus ad totum. quare q̄ ⁊ vt e ad h: ita c ad k. permutatim ergo e ad c vt h ad k. ergo p vicesimamprimam secundi ⁊ equam pportionalitatem m ad k sicut a ad c. ergo q̄ per secundam huius g sit dimidium m: erit a ad c sicut g ad l: dimidium scilicet ad dimidiam differentiam sicut totum m ad k totam differentiam. quod est propositum.



7 ¶ Si fuerint tres numeri in hac medietate dispositi: extremorum ⁊ medii ad differentiam eandem esse proportionem impossibile est. maiorem vero siue minorem: possibile.

¶ Sint tres numeri a b c in hac medietate constituti: et a maximus: et differentia a ad b, et b ad c sit d. dico impossibile esse eandem proportionem a ad c ⁊ b ad d. nam si id possibile foret: ponatur ergo vt sit a ad c tanq̄ b ad d. ergo p vicesimamquintam secundi qd fit ex a in d equum est ei qui fit ex b in c. at p decimam quartam primi qd fit ex a in d tm̄ est q̄tum qd fit ex d in se et d in b qui sint e ⁊ f. sed per eandem b in c tm̄ est q̄tum qd fit ex c in d ⁊ c in se qui sint g ⁊ h. equabitur ergo adinuicem e f simul et g h simul. qd est impossibile. qd sic ostendo. nam p septimam secundi f ad e sicut b ad d. et per eandem h ad g sicut c ad d. sed p nonam secundi pportio b ad d maior est q̄ pportio c ad d. igitur ⁊ pportio f ad e maior erit pportione h ad g. quare si f equetur h p eandem e erit minor g. quare e ⁊ f non equabuntur g ⁊ h. et si f sit minor h ergo p decimamseptimam secundi e etiam erit minor g. quare compositus ex e ⁊ f duobus minoribus non equabitur composito ex g ⁊ h. at si f ponitur maior h, et compositus e ⁊ f equetur composito g ⁊ h: ergo per decimamnonam secundi pportio f ad e minor erit q̄ pportio h ad g: cuius oppositum monstratum est. constat ergo qd dictum est. ¶ Sed extremi ad extremum pportio maior possibilis est q̄ medii ad differentiam si ab vnitate tres continue ponantur termini qui erunt in hac medietate. et qr extremi scilicet ternarii ad vnitatem est pportio tripla: sed medii binarii ad vnitatem (que differentia est) pportio dupla: constat extremi ad extremum maiorem esse proportionem q̄ medii ad differentiam. et ita si post vnitatem in hac medietate numeri apte discontinue sumantur. Possibilis est etiam extremi ad extremum pportio minor q̄ medii ad differentiam. nam acceptis quibuscunq; tribus terminis continue post vnitatem: maior erit pportio medii ad vnitatem que erit differentia q̄ extremi ad extremum quorum differentia semper est binarius.



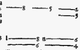
8 ¶ Tres numeros in hac medietate inuenire quorum pportionis medii ad differentiam: ad proportionem extremorum differentia sit qualibet data proportione maior.

¶ Sint a ⁊ b numeri date pportionis ⁊ b maior: addo b ad a ⁊ fiat c cui etiam addo b et fiat d. manifestum est d c a esse tres numeros in hac medietate constitutos cum b sit communis differentia d ad c ⁊ c ad a: quorum dico differentiam pportionis c ad b medii ad differentiam: ad pportionem d ad a esse data pportione b ad a maiorem. nam pportio c ad a addit sup proportionem c ad b proportionem b ad a. et proportio d ad a est maior pportione c ad a. addet igitur pportio d ad a sup proportionem c ad b maius proportione data b ad a. est itaq; differentia pportionis c ad b ad proportionem d ad a data proportione maior.



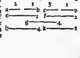
9 ¶ Si extremus extremi duplus: erit medius differentie triplus: et conuertitur. q̄ si alter alterius maius duplo fuerit: erit medius minus triplo differentie: et econuerso.

¶ Nam si a maximus sit duplus b minimi: erit b duplus differentiarum. quare c ex b ⁊ differentia illa constitutus eidem differentie erit triplus. et si c est triplus ad differentiam cum constituatur ex illa differentia et b: ergo b erit duplus ad differentiam. quare a constitutus ex b ⁊ dupla differentia que equatur b iterum inuenietur duplus ad b. quod est primum. et si a est triplus ad b: idem b equabitur vni differentiarum. at b ⁊ vna equalium differentiarum constituunt c. igitur c duplus est ad differentiam. et si c duplus est ad differentiam erit rursus a triplus ad b. nam si c sit duplus ad differentiam cum sit constitutus ex differentia ⁊ b: differentia illa equabitur b. sed b cum equali differentia bis sumpta constituit a. igitur a triplus est ad b. et vniuersaliter si maximi ad minimum proportio maior q̄ dupla inueniatur: erit semper minimus ad differentiam minor q̄ duplus. igitur ⁊ medius ex mimo ⁊ differentia constitutus ad differentiam minor et it q̄ triplus Et conuertitur vt in aliis quoq; monstratum est.



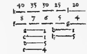
10 ¶ Datis quibuslibet duabus pportionibus: fm vtranq; in Arithmetica medietate tres terminos ordinare: quorum adinuicem differentie sint equales.

¶ Sint minimi termini duarum datarum pportionum a b ⁊ c d. et differentie illorum sint e ⁊ f. sumo item g numerum aliquem quem communiter numerent differentie e ⁊ f. et sint numeri fm quos ipsum numerant h et k. deinde multiplico a ⁊ b per h: ⁊ proueniant l ⁊ m. et multiplico c et d per k et proueniant n et o. p septimam secundi l ad m vt a ad b. et n ad o vt c ad d. et differentia l ad m est g. ⁊ similiter differentia n ad o est g. si igitur g est partisumo medium inter l et m qui constabit ex m et dimidio g. et medium inter n et o qui constabit ex o et dimidio g. et erunt tres termini l ⁊ m cum suo medio fm pportionem a ad b, et tres alii n et o constituto eorum medio fm pportionem c ad d in arithmetica medietate quorum adinuicem differentie sunt equales



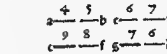
li ast g esset impar dupla di essent l m n et o et dupla ad g p correlarii septime secundi pueniret differentia. si ergo inter illos mediū sumātur tam horū q̄ illorū differentia ad medium erit g. sicq̄ totum manifestum erit propositum.

¶ Quotlibet numeros fm Arithmeticam medietatem sumere: quorū differentie dato numero non sint minores: extremorū vero ꝓportio sit date ꝓportioni equalis. 11



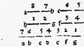
¶ Sint a et b termini date proportionis: et c eorū differentia: et d sit numerus fm quem sumendi sunt quotlibet numeri: et e numerus quo non minores debeāt esse differentie. multiplico a et b fm nūerum vno minorem d et pueniant f et g: quorū differētia c toties nūerabit. sumo ergo media fm differentias equales c et fiet vt oēs numeri sint fm nūerum d. mltiplicet item c donec pueniat maior e: et fiat hoc fm h. ducoq̄ h in f et g et omnes medios et pueniāt k l et mediī inter illos. manifestū est extremorum proportionem esse proportioni a ad b equalem: et numerum sumptum esse fm d et differētias inter se equales et numero e dato maiores. quod est propositum.

¶ Si sumptis quotlibet nūeris in hac medietate: aliī totidem eandem habentes differētiam maiores minoribus coniūgant: numeros equales puenire necesse est. 12



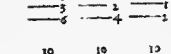
¶ Sint a b c d q̄libet numeri in hac medietate quorū a sit minus: et e f g h totidem in hac medietate et e illorū maximus: sintq̄ horū et illorū equales differētie. dico a et e simul equari b et f et reliquis hoc modo sequētibus. nam quia a et e sunt circūpositi b et f et equales per hypothesim differētie: ergo per tertiam primi a et e simul equātur b et f. et hunc in modum de reliquis argumentare.

¶ Numeros quotcunq̄ in hac medietate datos coacervare. 13



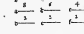
¶ Hoc demōstrat aggregatorū summam reperire: quā nōnulli ꝓgressiōem vocant. si enī sunt in nūero pari vt a b c d. e f g h q̄ igit̄ p precedentem a h equāt̄ur b g et c f et d e fm seriei medietatem. si ergo in coacervatum ex a et h duob⁹ extremis ducat̄ totius seriei medietas pueniet summa totalis ex oībus coacervata. At si numerus eorū sit impar vt a b c d e f g eritq̄ eorū medius vt d. et eius ad extremos a et g eadem erit differentia quare per scdām primi est medietas a et g: et similiter medietas b et f: et medietas c et e. numerus igitur seriei oīm in ipm ductus oīm summam cōficit. quod est propositum.

¶ Si q̄libet nūeri huius medietatis aliis totidē siue eq̄libus siue in eadē medietate sumptis minores minoribus addātur: ꝯpositi quoq̄ fm eādem medietatē disponētur. 14



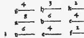
¶ Nam siue equales equalibus addātur siue hoc modo nūeri quicūq̄ totidem aliis in eadem medietate cōstitutis: quia equalib⁹ differētiis equales differētie addūtur et tote differētie adinuicem erūt equales. quare per diffinitionem compositi erunt in hac medietate ꝯstituti. quod est propositum.

¶ Si equales totidem auferant̄ siue ipsi ab eq̄libus substrahātur: residuum in eadem medietate inuenietur. 15



¶ Nam equalibus de quibuslibet eorū demptis erūt eedem residuorū que et totorū differētie: idētidem quibuslibet eorū ab equalibus demptis eedem que substractorū manebunt differentie. igitur per diffinitionem residua erunt in arithmetica proportione. quod intendebatur.

¶ Si vero de eisdem sibi in eadem medietate dati minores a minoribus tollātur: residui vel erunt equales vel eiusdem medietatis rationem suscipient. 16



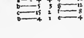
¶ Hec quodāmodo decimequarte et decimequinte ꝯuersa est. nam datis a b c in hac medietate maioribus et d e f minoribus: quorū ad primos differentie sint equales: substractis d e f ab a b c. residui erūt equales: differentie a ad d. quare adinuicem equales. at si numeri sumpti vt g h k non hēant singuli ad singulos a b c equalem differētiam. q̄ detractorum et totorum eq̄les sunt differentie: erūt et residuorū equales differentie. et cū residua nō sint equalia: inter eos erit hec medietas. quod est propositum.

¶ Si quotlibet numeri huius medietatis fm eundem nūerum vel multiplicentur vel diuidātur: erunt et ꝓducta et diuidentia in hac medietate eodem ordine continuata. 17



¶ Sint dati quotlibet numeri in hac medietate: vt a b c qui multiplicētur p e et pueniant f g h et qui diuidātur per e: et pueniant k l m. dico ꝓducta f g h et diuidētia k l m eodem ordine in hac medietate ꝯtinuata. nam q̄ multiplicatorum a b c differentie sunt equales: ergo per correlariū septime secundi et productorum. et etiam per scdm quoties diuidentia k l m numerabunt a b c et toties differētie numerabunt differentias et eodem ordine. est ergo notum quod proponitur.

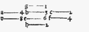
¶ Datum nūerū in quotlibet partes que arithmetica medietate se excedāt diuidere. 18



¶ Sit numerus diuidēdus a: et b nūerus fm quem ꝓponit̄ diuidi. Inuenio per decimātertiā huius numerum ex oībus ab vnitate ad b coacervatum qui sit c. et qui sit vt partes ab ipso denoīate. et resoluas si vis a in cōsimiles partes: dehinc resolutum diuidas per c et reuertetur numerus fm a qui sit d per quem multiplica oēs numeros ab vnitate ad b qui sunt in hac medietate vt notum est et pueniāt f g h k partes denoīate ab c que per precedentem erūt in hac medietate. et per nonā primi manifestū est eas cōstituere a. et sunt sumpte fm numerum b. effectum est igitur propositum.

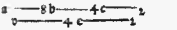
¶ Si inter numeros ꝓportiōales mediū fm hanc medietatem designētur: erit extremorum ad illos proportio vna. 19

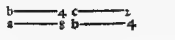
¶ Sint a b c numeri in hac medietate constituti et similiter totidem d e f: sitque a ad b sicut d ad f. dico a ad b ut d ad e et b ad c ut e ad f. nam si a c et d f sint equales: constat propositum. si non: sint ergo d f maiores et a c minores. quia enim que proportio d ad f totius ad totum: ea est a ad c detracti ad detractum: ergo per quintam secundi differentia d ad f ad differentiam a ad c residuum ad residuum: sicut d ad f totum ad totum quare n. edietas differentie d ad f que sit h ad dimidium differentie a ad c que sit g per correlarium decime quarte secundi sicut d ad f. eritque que proportio d ad f ea sit a ad c: ergo permutatim d ad a sicut f ad c. cum itaque f ad c sicut h ad g: ergo per idem correlarium e ad b sicut d ad a. quare permutatim d ad e sicut a ad b. et consimiliter probabis f ad e sicut c ad b aut econtra. quod est propositum.



10 ¶ Si in geometrica medietate tres numeri statuantur: erit que maximi ad medium: ea differentie ipsorum ad differentiam medii ad minimum proportio.

¶ Sint a b c tres numeri in geometrica medietate dispositi per diffinitionem que proportio a ad b ea est b ad c. et sit differentia a ad b numerus d. et differentia b ad c medii ad minimum numerus e. dico eandem esse proportionem a ad b et d ad e. capio enim b et ut totum et ut detractum. et quia que proportio a ad b totius ad totum: ea est b ad c detracti ad detractum. igitur que proportio a ad b totius ad totum et maximi ad medium: ea est differentie a ad b ad differentiam b ad c per quintam secundi residui ad residuum. quod est propositum.



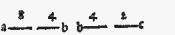


11 ¶ In hac medietate quod sub extremis conficitur: equale est quadrato medii.

¶ Hec ex diffinitione et vicesimasexta secundi statim cognoscitur.

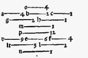
12 ¶ In eadem medietate duo extremi coniuncti: maius sunt quam medius duplicatus.

¶ Hec itidem statim cognoscitur per vicesimamquartam secundi: sumpto medio pro secundo et tertio.



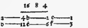
13 ¶ In eadem medietate quanto maximi ad medium maior est proportio: tanto etiam maximi et minimi ad duplum medii maior erit proportio.

¶ Sint a b c continue proportionales: et d e f itidem continue proportionales sed in maiore proportione. dico quod quanto maior est proportio a ad b quam d ad e: tanto maiorem esse proportionem a et c ad duplum b quam proportio e et f ad duplum e. sit enim g differentia a ad b/ et h differentia b ad c/ similiter k differentia d ad e/ et l differentia e ad f. et quo g excepit h sit m/ quo vero k excedit l sit n. quia enim maior est proportio a ad b quam d ad e: ergo per duodecimam secundi a ad d totius ad totum maior est proportio quam b ad e detracti ad detractum. ergo per decimamtertiam eiusdem g ad k residui ad residuum maior est proportio quam a ad d totius ad totum: quare multo fortius quam b ad e detracti ad detractum. quia igitur g ad k maior est proportio quam b ad e. igitur per duodecimam eiusdem g ad b maior proportio quam k ad e. quare per undecimam eiusdem b ad g minor proportio quam e ad k. et per vicesimam huius g ad h maior est proportio quam k ad l. nam g ad h ut a ad b/ et k ad l ut d ad e. quare eadem argumentatione qua pauloante g ad m minor proportio quam k ad n. quare per quintam quinti erit b ad m minor proportio quam e ad n. per eandem igitur dupli b ut o ad m minor proportio quam dupli e ut p ad n. et quia a et c superant duplum b quantum est m: et similiter compositus ex d et f excedit p duplum e quantum est n: ut facile ex precedente cognoscas. et proportio p ad n maior proportione o ad m. igitur per secundam partem decimequinte secundi p et n ad p minor proportio quam o et m ad o. igitur d et f simul ad p proportio minor quam a et c simul ad o. quod est propositum.



14 ¶ Si quolibet numeris in hac medietate sumptis totidem alii eiusdem proportionis maiores maioribus addantur: compositi quoque in hac medietate inveniuntur dispositi.

¶ Nam si que proportio a ad b et b ad c: ea sit d ad e et e ad f. igitur permutatim que proportio a ad d: ea est b ad e et c ad f. igitur per vicesimam secundi que proportio a ad b: ea erit compositi ex a d ad compositum b e. et compositi b e ad compositum c f. quod est propositum.



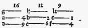
15 ¶ Si dispositis aliquot numeris in hac medietate numeri equales singulis addantur: erit inter compositorum maiores proportio maior.

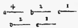
¶ Sint a b c in geometrica medietate dispositi: et d e eorum differentie: et f numerus singulis addendus. quia igitur quo abundat f a super f b est d. et quo abundat f b super f c est e. et per nonam secundi f ad d minor est proportio quam f ad e. et per vicesimam huius permutatim argumentando a ad d ut b ad e: per idem erit f a ad e maior proportio quam b f ad e. itidem et proportio b f ad e maior quam c f ad e. et quia d ad e ut a ad b ut dictum est: et differentia a f ad b f est d. et differentia b f ad c f est e: erit proportio a f ad b f maior quam b f ad c f. et quanto differentia fuerit maior: tanto differentia unius proportionis super differentiam alterius erit maior.



16 ¶ Si quotlibet numeris in hac medietate datis: totidem alii in eadem quidem medietate sed non secundum eandem proportionem sumpti: maiores minoribus addantur: inter compositorum maiores: maiorem esse proportionem convenict.

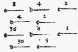
¶ Sint continue proportionales a b c et similiter d e f: sed in minori proportione. dico quod a d ad b e maior proportio quam b e ad c f. Sit enim quod ex a in f producitur/ g. et quod ex b in e/ h. et quod ex d in c: k. per primam quinti proportio g ad h est differentia proportionis a ad b super proportionem e ad f. sed et proportio h ad k est per eandem differentia proportionis b ad c super proportionem d ad e. quare sicut g ad h ita h ad k. quare per vicesimamsecundam huius g et k plus sunt quam duplum h. et quia quod ex a in c et quod ex d in f sunt quantum quod ex b in se et e in se per vicesimamsextam secundi erunt ergo cadem cum g et k maius quam quadrata b et e cum duplo h. maius quam quod ex a d in c f quam quod ex b e in se. et ideo maior proportio a d ad b e quam que est b e ad c f per vicesimamseptimam secundi. quod est propositum.





¶ Tribus numeris in hac medietate sumptis: maximi ad minimũ et medii ad alteram differentiarum eandem esse proportionem impossibile est. 27

¶ Sint a b c tres nũeri in hac medietate: ⁊ differentie eorũ d et e. dico impossibile eẽ eãdẽ ꝓportiõem a ad c ⁊ b ad d vel b ad e. nam si esset a ad c sicut b ad e: ergo ꝑmutatim esset a ad b sicut c ad e. et qꝛ per vicesimam huius b ad c sicut d ad e erit ꝑmutatim b ad d sicut c ad e. quare que ꝓportio a ad b ea erit b ad d: sed a ẽ maior d. igitur per quartam secũdi b maior d. igitur que ꝓportio a ad b maiorem eius portionem erit b maioris portionis ad minorem. qd per vndecimã quinti est impossibile ⁊ ꝓpositum.

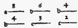


¶ Trium numerorum huius medietatis quo maximi ad minimũ maior est proportio: eo medii ad quãlibet differentiarum proportio minor. 28

¶ Sit hypothesis vt prius. hoc enĩ ideo est qꝛ quãto a ad c maior: tanto differentia b ad c erit maior quare tanto numerus c maior. et ideo ꝓportio b ad e minor similiter quanto a ad c maior tanto etiã a ad b maior et quãto a ad b maior tanto d differentia maior. quãto aũt d differẽtia maior: tãto b ad ipsam proportio minor. quod est propositum.

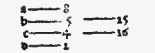
¶ Numeros quotlibet in geometrica medietate ꝯtinuare: quorũ extremorũ ꝓportio non sit data ꝓportiõe maior: minorum xͦ differentia non sit dato numero minor. 29

¶ Diuido per sexagesimãnonam noni ꝓportiõem datam in ꝓportiões quarũ quotlibet sint equales: et si differẽtia minorum sit equalis dato numero aut maior: effectum est propositum. si aũt minorum differentia sit dato numero minor. duco datum numerum in quẽlibet numerum illarũ proportionum et factum apparebit propositum.



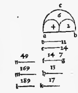
¶ Si inter numeros eiusdem medietatis: ſm arithmeticam medietatem medii statuantur: illi quoqꝫ in geometrica medietate disponẽtur. 30

¶ Sint a b c cõtinue in hac medietate dispositi: sitqꝫ d medius inter a ⁊ b: et e inter b ⁊ c ſm arithmeticam medietatem. dico que ꝓportio a ad b: eam esse d ad e. nam ꝑ decimãnonam huius vt a ad d: ita b ad e. igitur permutatim vt a ad b: ita d ad e. quod est propositum.



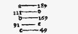
¶ Si inter duos numeros medij duo proponãtur alter in arithmetica ⁊ alter in geometrica medietate: qui est scdm arithmeticam reliquo tanto amplius potest q̃tum est quadratum differentie ipsius ad alterutrum extremorum. 31

¶ Ut inter a ⁊ d sint b c duo medij: scꝫ b in arithmetica medietate: ⁊ c in geometrica. dico b amplius tanto posse sup c q̃ id est quadratum differẽtie b ad a aut b ad d: qd idem est. nam ꝑ vicesimãprimam huius qd fit ex a in d tm est q̃tum quadratum c. at ꝑ tertiã huiꝰ quadratum b addit sup id qd fit ex a in d q̃tum quadratum differẽtie a ad b. igitur ⁊ tm addet sup quadratum c. quod est propositum.



¶ Tres numeros in arithmetica medietate reperire: inter quorũ binos ⁊ binos scdm geometricam medietatem medios assignare cõtingat. 32

¶ Sint a ⁊ b duo nũeri pares: et b aut equalis aut numerãs a. et ꝯpositus ex a ⁊ b sit c cuius duplus sit d. ducaturqꝫ a in c ⁊ ꝓueniat e. quia ꝑ primam septimi cõpositus ex a et c est par: et ꝑ duodecimam eiusdẽ e est par. ergo ꝑ sextam eiusdẽ si ꝯpositꝰ ille detrahaſ ab e relinqueſ par. sit ergo par relictus f. et eius medietas g. et compositus ex g et c sit h. itemqꝫ h et a componãt k sintqꝫ l m n quadrati k h g quos dico esse numeros quales querimus. nam ꝑ decimãquintam primi l quadratum k addit sup m quadratum h: q̃tum est quadratum a. et qd fit ex h bis in a. hoc est q̃tum quadratum a ⁊ qd fit ex a in d et f. et qd fit ex a in se et in f minuit ex eo qd fit ex a in e q̃tum est qd fit ex a in c. et qd fit ex a in d est q̃tum qd fit ex b in c. et qꝛ qd ex a et b in e equaſ ei qd ex c in e: erit qd addit quadratum k sup quadratum h minus eo qd ex c in e q̃tum est qd fit ex c in a. et ex eodem patere potest qꝛ quadratum h addit sup quadratum g q̃tũ qd fit ex c in se ⁊ in f: qd minꝰ est eo qd fit ex c in e q̃tum est qd fit ex c in a. quare quanto l abundat sup m tanto m abundat sup n. quare quadrati l m n sunt in arithmetica medietate constituti. et ꝑ correlarium quarte sexti inter l et m est vnus medius ꝓportiõalis: ⁊ similiter inter m ⁊ n. factum est ergo propositum.



¶ Si sumptis tribus terminis in arithmetica medietate medij inter illos ſm geometricam medietatem statuãtur: inter quadratos illorũ quadratũ medii aliorũ in arithmetica medietate constare necesse est. 33

¶ Sint a b c numeri in arithmetica medietate cõstituti ꝑ precedentem inuẽti inter quos sint d e ſm geometricam medietatem. dico quadratũ medij b eẽ in arithmetica medietate inſ quadrata mediorũ d ⁊ e. nam qꝛ quadratum d ꝑ vicesimãsextam secũdi est q̃tum qd fit ex b in a. ꝗ per nonam primi quadratum d addet sup quadratum b q̃tum qd fit ex b in dr̃iam suam ad a. ⁊ ꝯsimiter quadratum b addet sup quadratum e q̃tum qd fit ex b in dr̃iam suam ad c. sed b ad a ⁊ b ad c equalis est differẽtia: igitur quadrata numerorum d b e sunt in arithmetica medietate. quod est propositum.

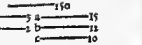
¶ Datis tribus terminis in harmonica medietate: erit maximi ad mediũ: q̃ medij ad minimum maior proportio. 34

¶Sint a b c tres numeri in harmonica medietate constituti: sitque a maximus. dico a ad b maiorem esse proportionem quam b ad c. Sit enim d differentia a ad b: et e differentia b ad c. erit enim per diffinitionem d ad e sicut a ad c. et per nonam secundi a ad c maior proportio quam a ad b. quare a ad b minor proportio quam d ad e totius scilicet ad totum minor proportio quam detracti ad detractum. ergo per decimamquartam secundi b ad c residui ad residuum minor proportio quam a ad b totius ad totum. quod est propositum.

35 ¶In eadem medietate duo extremi coniuncti: maius medio duplicato efficient.

¶Nam per secundam secundi differentia maiorum est maior quam differentia minorum. sumpto ergo numero minore maximo extremorum qui addat super medium quantum medium super minimum per secundam primi ille cum minimo equabunt medio duplicato. igitur per communem scientiam maximus extremorum qui eo est numerus maior cum eodem minimo constituet numerum medio duplicato maiorem. quod est propositum.

36 ¶In eadem medietate quod continetur sub extremis est quantum quadratum medij cum eo quod fit ex differentia in differentiam.



¶Sint ut prius a b c tres numeri in hac medietate constituti: et eorum differentie d et e. dico quod fit ex c in a esse tantum quantum quod fit ex b in se cum eo quod fit ex d in e. nam quod fit ex c in a est tantum quantum quod fit ex c in b et in d per nonam primi. ergo per vicesimamquintam secundi quod fit ex c in d est quantum quod fit ex e in a. et quod fit ex e in a quantum quod ex e in b et d. et quod ex e et c in b per decimam primi quantum quod ex b in se. ergo quod fit ex c in a est quantum quod b in se et e in d. quod propositum.

37 ¶In eadem quoque medietate quod fit ex medio in extremos: duplum est eius quod continetur sub eisdem.



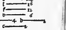
¶Nam quod fit ex b in a est quantum quod ex c in a et e in a per decimam primi. et quod ex e in a quantum quod ex d in c per vicesimamquintam secundi et per decimam primi. itemque quod ex d in c cum eo quod ex b in c quantum quod ex a in c. quare quantum quod ex c in a. est itaque quod astruitur notum.

38 ¶Inter unitatem et aliquem numerum: sive inter numeros in sua proportione minimos: secundum harmonicam medietatem non est assignare medium.



¶Inter numerum et unitatem non assignabile. nam cum que proportio numeri dati ad unitatem ea esset differentie numeri dati ad medium ad differentiam medij ad unitatem. et differentia numeri dati ad medium minor esset numero dato: oporteret medij numeri dati et unitatis ad unitatem: minorem esse differentiam differentie ad unitate. de numeris autem in sua proportione minimis idem statim patet. nam cum eadem esset differentiam que illorum numerorum adinvicem proportio et eorum differentie sint minores. illi ergo non essent in sua proportione minimi. quod est contra hypothesim.

39 ¶Secundum datam proportionem: musicam invenire medietatem.



¶Sint a et b extrema date proportionis: et c differentia eorum: et compositus ex eis sit d. ducatur igitur a et b in d et proveniant e et f. sitque eorum differentia g. quam per nonam primi d numerabit secundum c. et quia d est tanquam a et b ergo c ductus in a et in b facit g. et eo quod fit ex c in a quod sit h: dempto de g remaneat k: que producet b in c. sumatur ergo l medius inter e et f cuius differentia ad e sit h: certum est differentiam eius ad f esse k. et quia per septimam secundi h ad k tanquam a ad b. et per octavam eiusdem etiam e ad f tanquam a ad b. constat ergo per diffinitionem factum esse propositum.

40 ¶Terminis extremis propositis: medium inter eos secundum harmonicam medietatem reperire.



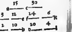
¶Sint a et b extremi harmonice medietatis quorum iubear medium invenire. capio eorum differentiam que sit c: et compositum ex ipsis qui sit d. deinde duco a in c et proveniat e qui dividatur per b: et dividens sit f. eritque per conversam vicesimequinte secundi que proportio a ad a eadem c ad f. dempto ergo f de c remaneat g. eritque f ad g sicut a ad b. quod ostendo. nam quia sicut d ad a ita c ad f. ergo permutatim d ad c totus ad totum ut a ad f detractus ad detractum. quare itemque ut a ad f ita b ad g residuus ad residuum. sumo igitur inter a et b medium numerum cuius differentia ad a sit ergo permutatim a ad b sicut f ad g. per diffinitionem constat factum esse propositum. f. et quia relinquetur differentia eius ad b esse g:

41 ¶Si inter duos numeros duo statuantur medij: alter secundum arithmeticam et alter secundum harmonicam medietatem: qui secundum arithmeticam maior est et quam maximi ad ipsum eadem alterius ad minimum proportio.



¶Sint extremi a b. et medius secundum arithmeticam medietatem c. et secundum harmonicam d. dico c esse maiorem. quod autem c maior sit d statim patet quia per diffinitionem ea sic proportio d: et eam esse proportionem a ad c quam d ad b. quia autem c maior sit d statim patet. ergo maior erit differentia a ad d quam a differentie a ad d ad differentiam d ad b que a ad b. sed differentia a ad c et c ad b equantur: ergo maior erit differentia a ad d quam a ad c. et quia ea sit proportio a ad c que d ad b patet. nam per quintam huius c est medietas a et b simul iunctorum et per tricesimamseptimam huius quod ex d in a et in b producitur duplum est ad id quod fit ex a in b. igitur quod fit ex d in c dimidium per secundam primi a et b: equabitur ei quod fit ex a in b. igitur per vicesimam quintam secundi a c d b sunt proportionales ut dicitur. quod est propositum.

42 ¶Si inter numeros proportionales medij secundum harmonicam medietatem statuantur: extremorum ad illos erit proportio una.



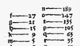
¶Sit proportio a ad b sicut c ad d. et sit e medius harmonice inter a et b. et similiter f medius inter c et d. dico a ad e sicut c ad f. Sint enim differentie g h et k l. quia quam proportio a ad b eadem est c ad d. et quam a ad b ea est g ad h. et que c ad d ea est k ad l. ideirco erit g ad h ut k ad l. quare permutatim g ad k ut h ad l. quare per vicesimam

secūdi g h ad k l sicut g ad k.et iterū qr pmutatim a ad e sicut b ad d:erit per idem a ad e sicut g h ad k l quare sicut g a d k.et qr a z e sūt tota et g z k detracta:erit ergo e ad f residuus ad residuum p quītam secundi vt a ad c totus ad totum. quare pmutatim a ad e sicut c ad f. quod est propositum.



¶ Si inter duos numeros alij duo medij pportionaliter sumantur: sumaturq̧ maior scdm arithmeticam medietatē: sumetur minor scdm harmonicam. q si minor scdm harmonicam: maior scdm arithmeticam sumetur. 43

¶ Sit enim a ad c sicut d ad b.et c maior sit medius scdm arithmeticam medietatem inter a z b. dico d esse mediū scdm harmonicam medietatē inter a z b. et puertitur. Sumo enī p quadragesimāprimā hui⁹ e z f q̄ sint in pportiōe a ad b. inter q̄s sit g scdm arithmeticam medietatē medi⁹/z h scdm harmonicam. quia igit p quadragesimāprimam e ad g sicut h ad f. et p decimānonam huius e ad g sicut a ad c. q̄re cū d ad b vt a ad c: et h ad f vt e ad g. erit ḡ h ad f vt d ad b. sed z qr h est medius harmonicus ad quem f extremum habet eam proportiōem q̄ b ad d: facile p precedentem inuenies d eē in harmonica medietate inter a et b. cōuersum aūt facile pbabis per quadragesimāprimā hui⁹ ostēdēdo mediū arithmetice medietatis quēcunq̧ inuentum: esse equalem c maiori.





¶ Numeros quotlibet in arithmetica medietate ꝯtinuare: inter quoꝝ binos z binos scdm harmonicam medietatem possint assignari medij. 44

¶ Et si iubear continuare tres numeros in arithmetica medietate inter quoꝝ binos z binos possint assignari in harmonica medietate mediū. capio a b c totidem numeros in arithmetica medietate cōstitutos: quoꝝ differētia sit par: z inter illos sumātur medij in eadem medietate qui sint d z e. et multiplicentur oēs per e. et pueniant f/g/h/k/l qui p decimāseptimam huius erūt in arithmetica medietate. ducaturq̧ iterū c in b z fiat m. et quia p septimam secūdi que pportio c ad e ea est h ad k. et p octauam eiusdem iterū q̄ c ad e ea est m ad l. erit inter h z l numerus k maior est in arithmetica medietate medi⁹. igitur p precedētem m est medius inter h z l in harmonica medietate. multiplicētur item oēs hi per d: et pueniāt n/o/p/q/r/s et erūt vt prius n/o/p/q/s in arithmetica medietate: et r inter p z s in harmonica medietate. ducatur item a in b z pueniat t. et eadem rōne qua prius mōstrabis ipm eē mediū in harmonica medietate per precedentem inter n z p. sicq̧ erūt ꝯtinuati vt ppositum est in arithmetica medietate numeri/factisq̧ apparebit propositum. ¶ Et si de pluribus ageretur: quoties erit apponendus medius harmonicus: toties facienda erit modo predicto multiplicatio.



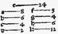
¶ Duobus numeris ad alios duos proportionalibus: vtrorūq̧ alterū inter reliquos medium esse in harmonica medietate: est impossibile. 45

¶ Et sit a ad b sicut c ad d: dico c nō eē medium scdm medietatem harmonicam inter a z b: neq̧ b inter c et d. si enī possibile sit: esto ergo c in harmonica medietate inter a z b: et b inter c z d. quia enī a ad b sicut c ad d. et inter a z b et c z d numeros quidē pportionales: ꝯstituūtur c z b medij scdm medietatem harmonicam. igitur per quadragesimamsc̄dam huius erit proportio a ad c sicut c ad b maximi sez ad medium que medij ad minimum. quod per tricesimāquartam huius est impossibile et propositum.



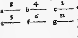
¶ Si tres numeri in arithmetica medietate sumpti aliquem numerum numerent: alij scdm quos eum numerant in ordine harmonice medietatis inuenictur. 46

¶ Sint a b c in medietate arithmetica sumpti: numerētq̧ d scdm e f g. dico e f g esse in harmonica medietate ordinatos. Sint enī tres dupli eoꝝ h k l qui et iidem erūt vt parebit in harmonica medietate et sit m inter h z l in arithmetica medietate medius. qr enī a in e z c in g cōstituūt d: ergo p vicesimam quintam secundi que pportio a ad c ea est g ad e: et que g ad e per quintam secūdi ea est l ad h. sed per decimānonam huius l ad m sicut a ad b. et qr per eādē vicesimāquintam secūdi a ad b sicut f ad e: erit ob hoc l ad m sicut k ad h. sed p quadragesimātertiam huius k est medius harmonice inter l z h. igit et f harmonice medius inter g z e. quod est propositum.



¶ Numeros quattuor perscrutari: quoꝝ secundus inter primum z tertium: z tertius inter secundum z quartum in harmonica medietate cōstituatur. 47

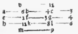
¶ Sint a b c d quattuor numeri in arithmetica medietate cōstituti qui numerent eūdem numerum e scdm f/g/h/k. dico f g h k esse quattuor numeros quoꝝ g secūdus est in harmonica medietate inter f z h primum z tertiū. et h tertius itidem eē in harmonica medietate inter g z k scdm z quartum. nam qr tres nūeri a b c in arithmetica medietate ꝯstituti numerant e scdm f/g/h: ḡ per precedētem f/g/h sunt in harmonica medietate. et per idem quia b/c/d tres alij arithmetice medietatis numerant eundem e scdm g/h/k. ergo g h k sunt in harmonica medietate. est igit vt pponebat g medius harmonice inter a et h: et h itidem medius harmonice inter g z k. quod est propositum.



¶ Si tres numeri geometrice medietatis aliquem numerum numerent: et illos scdm quos numerant in eadem inueniri necesse est. 48

¶ Et sint a b c in geometrica medietate ꝯstituti q̄ nūerent d scdm e/f/g: dico g/f/e in eadem pportione reperiri. nam per vicesimāquintam secundi vt a ad b ita f ad e: et per eandem vt b ad c ita g ad f. quare erit e ad f vt f ad g: et f in geometrica mediate medius. quod est propositum.

¶ Si tres numeri musice medietatis aliquem numerent: alij scdm quos eum numerant in arithmetica medietate disponētur. 49



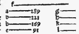
¶ Hec est conversa quadragesimesexte. Sint ergo a b c in harmonica medietate dispositi qui numerent d secundum e f g. dico e f g esse in arithmetica medietate constitutos. Si me h k l duplos ad a b c qui similiter erunt in harmonica medietate et in medium secundum arithmeticam medietatem inter h et l. eritque g quadragesimamprimam huius h ad m sicut k ad l. quare sicut g ad f adiuvante vicesimaquinta secundi. sed et per eandem vicesimamquintam secundi cognosces g ad e sicut h ad l. sed h ad m numerum in sicut g ad f suum medium et m ad l ut f ad e. igitur per decimamnonam huius f medius erit in medietate arithmetica inter g et e. quod est propositum.

50 ¶ Quotlibet numeros in geometrica medietate secundum datam proportionem continuare: inter quorum singulos secundum harmonicam medietatem medios assignare sit possibile.



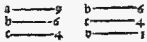
¶ Per tricesimamnonam huius sumantur secundum datam proportionem a/b/c tres numeri in harmonica medietate: et sint d e termini proportionis a ad c. et ducatur d in omnes illos et proveniant f g h qui per septimam secundi erunt in eadem medietate quia per correlarium eiusdem septime differentie f ad g et g ad h sint eque multiplices ad d e. ducaturque e in c et proveniat k. eritque per octavam secundi f ad h sicut h ad k. Item ducatur e in b et proveniat l. eritque l ad k sicut b ad c. quare l harmonice medius inter h et k. sicque habes duos secundum datam proportionem geometrice continuatos: inter quos a et duo medii harmonice medietatis sunt inventi. Nam si plures desideras duc d in omnes inventos et e in duos extremos et habebis tres in medietate geometrica continuatos et inter binorum singulos ea ratione qua prius medios in harmonica medietate sumptos et hoc quoque pacto quotquot voles invenies.

51 ¶ Tres numeros in harmonica medietate disponere: ita ut inter binos et binos medii secundum medietatem geometricam consistant.



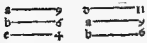
¶ Secundum exigentiam tricesimesecunde huius inveniantur a b c tres numeri in arithmetica medietate constituti: inter quos sint d et e in geometrica medietate. et sit f numerus quem omnes numerant: numerentque eum secundum g h k l m. et patet per quadragesimamsextam huius g/k/m esse in harmonica medietate: sed et per quadragesimamoctavam huius h inter g et k: et l inter k et m erunt in geometrica medietate. sicque patet effectum propositum.

52 ¶ Primam residuarum medietatum: in numeris constituere.



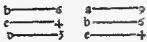
¶ Hec a geometrica sumitur. Et sint a b c in geometrica medietate ita tamen ut c minimus sit maior quam differentia maiorum. substrahatur igitur differentia maiorum ab c minimo/ et residuum sit d. dico b c d esse in hac prima collateralium medietatum constitutos. nam quia a b c sunt in geometrica medietate constituti: ideo que proportio a ad b: ea est per vicesimam huius differentie maiorum ad differentiam minorum. sed differentia a ad b est eadem differentie c ad d. igitur differentia c ad d minorum ad differentiam b ad c maiorum sicut a ad b. quare sicut b ad c maximi ad medium. per diffinitionem itaque patet propositum.

53 ¶ Secunde inventionem declarare.



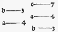
¶ Sint ut prius a b c in geometrica medietate quorum differentiam minorum addo ad a. et compositum sit d. dico d ad b esse in secunda reliquarum medietate. nam per vicesimam huius que proportio a ad b ea erit differentie maiorum ad differentiam minorum numerorum in geometrica medietate constitutorum. et eadem est proportio differentie a ad b ad differentiam a ad d. igitur per diffinitionem concluditur propositum.

54 ¶ Tertiam earundem in numeris assignare.



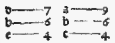
¶ Hec etiam habetur per geometricam medietatem. sit ergo precedentium hypothesis et maiorum differentia dematur ab b medio: sitque residuum d. dico b/c/d esse in tertia medietate. nam que differentia a ad b: ea est b ad d. igitur que proportio differentie a ad b ad differentiam b ad c ea est differentie c ad d ad differentiam b ad c. quare que proportio b maximi ad c medium: ea est differentie b ad d extremorum ad differentiam b ad c maiorum. constat igitur per diffinitionem b c d esse in proposita medietate. quod est propositum.

55 ¶ Quartam in terminis manifestare.



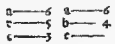
¶ Sint a b quilibet duo numeri: et compositus ex ipsis sit c. dico c/a/b esse tres terios in hac quarta medietate datos. quia enim differentia c et b extremorum: est a. et differentia c a maiorum: est b. quoniam que proportio a ad b medii ad minimum: ea erit differentie extremorum ad differentiam maiorum. per diffinitionem itaque constat factum esse propositum.

56 ¶ Quinte demonstrationem explicare.



¶ Hec a geometrica medietate elicitur. Sint igitur ut prius a b c tres numeri in geometrica medietate quorum c minimo addo differentiam maiorum: et compositus sit d. dico d b c esse in proposita medietate. nam differentia d c extremorum est differentia a ad b: igitur adiuvante vicesima huius que proportio b ad c medii ad minimum: ea erit differentie d ad c extremorum ad differentiam b ad c minorum. Itaque per diffinitionem demonstratum est propositum.

57 ¶ Sextam sub exemplo demonstrare.



¶ Hec ex harmonica cognosci potest. Sint a b c in harmonica medietate: per diffinitionem que proportio a ad c ea est differentie maiorum ad differentiam minorum. capio numerum d inter a et c cuius differentia sit ad a que b ad c. erunt itaque transmutate differentie. quia que differentia a ad b maiorum: ea est d ad c minorum. et que b ad c minorum: ea erit a ad d maiorum. dico itaque a d c esse qui peruntur. nam que proportio a ad c extremorum ea est differentie d c minorum ad differentiam a d maiorum. per diffinitionem igitur patet effectum esse propositum. Quod si capite secundi sue arithmetices divus Severinus testatur huic medietati quam quartam ponit proprium esse ut quod continetur sub maiore terio et medio duplum sit ei quod suo ordine quartam ponit proprium esse ut quod continetur sub maiore terio et medio duplum sit ei quod

cōtinetur sub medio ⁊ paruissimo:hoc indubitatū est per septimam secūdi quoties maximi ad minimū est habitudo dupla/alioquin per eandem non teneat sed per eandem semper que ꝓportio maximi ad minimam ea erit eius quod cōtinetur sub maximo ⁊ medio ad id qđ continetur sub medio ⁊ minimo/ immo id omni medietati cōmune est.

ℭ Septime terminos inuestigare. 58

a	9	a	9
d	7	b	6
b	6	c	4

ℭ Hec ex geometrica. Sint a b c tres numeri in geometrica medietate ab a maximo eorum substraho differentiam minorum ⁊ sit residuum d. et patebit vt prius que ꝓportio a ad b maximi ad minimū: eam esse differentie extremorum ad differentiam maiorum. quare per diffinitionem constabit propositum.

ℭ Octauam demum restat explanare. 59

a	9	a	9
d	8	b	6
b	6	c	4

ℭ Hec etiam ex geometrica. Sint sepius dati numeri a/b/c in geometrica medietate: et minorū differentia addatur medio: fiatq; compositus d. dico a/d/b esse in hac vltia medietate. nam que ꝓportio a ad b maximi ad minimum: ea est adminuēte vicesima huius differētia a ad b extremorū ad differētiam d b minorū. nam equatur differentie b ad c. igitur per diffinitionem a/d/b sunt in hac medietate. sicq; constant octo collaterales medietates monstrare.

ℭ Trium numerorum maximi ad medium: atq; differentie maximi ad minimum ad differentiam medij ad ipm: eandem esse proportionem impossibile est. 60

a	8	d	6
b	4		
c	2	e	2

ℭ Sint a/b/c tres diuersi numeri quicūq;: quorum a sit maximus/b medius/et c minimus: et differentia a ad c sit d. et differentia b ad c sit e. dico impossibile esse eandem ꝓportionē a ad b maximi ad mediū que d ad e differentie maximi ⁊ minimi ad differentiam medij ad minimum. nam si ea ꝓportio sit a ad b que d ad e totius scz ad totum que detracti ad detractū: erit c residui ad c residuū: que a ad b totius ad totum. est enim c vtriusq; residuum. quare a et b idem sunt numerus atq; equales. quod est contra hypothesim.

ℭ Si inter duos numeros sumātur tres medij: vnus sm arithmeticam medietatem: et vnus sm geometricam: et tertius sm harmonicam: arithmeticum maximū: ⁊ harmonicum minimum: atq; inter illos geometricum medium esse ꝓportiōalē est necesse. 61

a	20	d	40
		h	25
		g	20
b	8	e	16
c	5	f	10

ℭ Sit a ad c ꝓportio quecūq; que potest in duo equa diuidi. vt exempli causa quadrupla inter cuius extrema per tricesimānonam huius sit inuentus b in harmonica medietate duplo a b et c ⁊ ꝓueniant d/e/f qui cōsiliter erūt in eadem medietate. et quia per septimam secūdi d ad f vt a ad c: et a ad c posita est partibilis in duas equas ꝓportiones: partietur etiam d ad f in equas. diuidatur igitur per g. erit igitur d ad g vt g ad f. quare g per diffinitionem medius est geometricus inter d ⁊ f. et quia f ⁊ d sunt pares: ipsorū simul iunctorum capio medietatem que sit h: que per quintam huius est in arithmetica medietate inter d ⁊ f. habemus igitur inter duos numeros d et f tres medios h g e scz h in arithmetica medietate/ g in geometrica/ ⁊ e in harmonica demōstratos. qđ supponebat ꝓpositio. dico igitur d esse maximum mediorum: et e minimū: et g medium ꝓportiōaliter atq; geometricum inter h ⁊ e. nam quia h est medius inter d ⁊ f sm arithmeticam medietatē ⁊ e sm harmonicam: ergo p quadragesimāprimam huius h maior est q̄ e. et que ꝓportio d ad h ea est e ad f. igitur per vicesimāquintam secūdi qđ fit ex d in f: equū est ei qui fit ex h in e. sed quia g est medius ꝓportiōalis inter d ⁊ f: igitur per vicesimāsextam eiusdem quod fit ex d in f: equū est ei qui fit ex g in se. quare quod fit ex g in se idem est q̄tum quod ex h in e. igitur per secūdam partem eiusdem vicesimesexte secundi h g e sunt proporiōales. quare h erit maximus: g medius proportionalis: ⁊ e minimus. quod intendebat propositio.

ℭ Duos numeros quorum ꝓportio non sit data proportione maior / inuestigare: inter quos sm tres dictas medietates medios assignare sit possibile. 62

ℭ Datam proportionem quācunq; diuidamus per sexagesimānonam noni in quotlibet ꝓportiones quarum due sint equales: que ꝯposite nō sint data proportiōe maior. sm igitur illam ꝓportiōem ꝯpositam queram medium harmonicum sm exigentiam tricesimenone huius et oīno consimiliter operādo vt in principio precedentis factum est inueniam tres medios modo qui in precedenti dictus est, inter duos numeros quorum proportio non erit data proportione maior. sicq; constabit propositum.

ℭ Decimi elementorum arithmetices Jordani finis.

¶ Jacobi Fabri Stapulensis Elementa Musicalia ad clarissimũ virũ Nicolaum de haqueuille inquisitorum Presidentem.

Ecreuerã clarissime vir nulli meas elementorũ musicaliũ qualescunq̃ sunt prius dicare vigilias: q̃ probatas cognouissẽ. q̃uis id me minime lateret/demõstrationes: in quibus vel solis vis sciẽtie cõsistit: nõ probari non potuisse. Verũ si presentiũ iudicia parui ducis/reputasq̃: hi tibi ex ãtiquis sũmopere musicos cõmendare labores iure valebunt.

Mercurius	Tamyras	Ptolomeus
Orpheus	Hysmenias Thebanus	Eubolides
Pythagoras Samius	Terpander lesbius	Hippasus
Amphion thebanus	Lycaon Samius	Aristoxenus
Linus	Prophrastus Periotes	Philolaus Pythagoricus.
Arion lesbius	Estiacus Colophonius.	Archytas tarentinus
Mydas Phrygius	Tymotheus milesius	albinus
Corebus lydius	Nicomachus	Diuus Seuerin⁹ Boecius.
Hyagnis Phryx	Plato	
Marsias	aristoteles.	

Et similium q̃plurimi quos oẽs eterna memoria disciplinarũ eblãdissima Musica reddidit isignes inter quos: duos pceptores meos Jacobũ Labinũ ⁊ Jacobũ turbelinũ õnumero: tanq̃ ea arte posteritati victuros. Comẽdant ⁊ eã mirifici eius effect⁹. Pythagorici eni animorũ ferociã tibiis/fidibusq̃ emolliebant. Esclepiades fremẽtis vulgi seditiones crebro cantu compescunt. Idẽq̃ tuba surdis medebatur.
Damon pythagoricus ebrios et protinus petulãtes adolescẽtes: grauiorib⁹ modulis ad tẽperantiam reduxit. Febrẽ ⁊ vulnera: musica modulatione curauit antiq̃tas Eadẽ quoq̃ suauitate sciadas/coxendicũq̃ dolores emẽdauit: qd hismenias theban⁹ tẽtasse memoratur. Theophrastus ad animi pturbationes moderãdas musicos adhibuisse memorat modulos. Nec iniuria quidẽ. est eñ musica vt quedã moderationis lex atq̃ regula. Quamobrẽ bono iure eos notabat diogenes musicos: qui cũ citharã ad harmonicos cõsensus haberent temperatã: animũ gererent incõpositũ et prorsus harmonia vite destitutũ. Xenocrates organicis modulis lymphaticos liberauit.
Tales Cretensis suauitate cithare: morbos/pestilentiãq̃ fugauit. Terpãder et arion Iones ⁊ lesbios cantu a grauissimis morbis leuasse: diuus Seuerinus autor est.
Herophilus medicus egrorum venas musicis pensiculabat numeris.
Tymotheus aũt musicus dum voluit efferatũ reddidit alexandrũ ad armaq̃ furentẽ atq̃ aliter cũ libuit ab armis ad cõuiuia retraxit emollitũ. Thracius Orpheus ferarũ sensus fidibus/cãtuq̃ inflexit. hoc est ferinos hoĩm mores leges ad citharã canendo ad moderatã humanitatẽ reduxit. Cerui fistulis capiũtur studioq̃ modulationũ detinentur. Cygni hyperborei cithare cãtibus alliciũtur. Elephãtes indi organica dulcedine permulcẽtur. Buicule fistulis irretiũtur. Teneros adhuc infantiũ sensus permouent cãtus/crepitaculaq̃ vagientũ sedãt. Delphinos suis sibi fidibus cõciliauit arion. Serpẽtes cãtibus rũpuntur. Sepultorũ manes cantibus excitãtur. In actiaco littore mare citharã personare memorãtur. Megaris citharã personat saxũ: et ad cuiuslibet pulsantis ictum fidicinat. Et possem pleraq̃ talia vir clarissime ad musicã cõmendationẽ adducere. at tot/tantisq̃ ⁊ recentiũ ⁊ priscorũ cõmendatã autoritatibus tibi nũc ab me atq̃ bonarũ litterarũ studiis dicatã disciplinã: equo suscipias animo tuis auspiciis lucem habiturã. Et me vnum inter tuos clientulos tuarum virtutũ/tuiq̃ nominis obseruatorem esse cognoscito. Vale.

¶ Jacobus Stapulensis Jacobo Labinio et Jacobo Turbelino Musicis: suis charissimis preceptoribus.

Quod inter oratorē atqꝫ rhetora: id inter cantorem et musicum interesse voluntur: neqꝫ oratorem quemqꝫ dici mereri qui idem rhetor non sit. ita vestrum semper iudicium fuit: vt nec cantor quidē dici mereatur vnqꝫ: qui idem musicus non fuerit: pulchre mimos/ et hystriones a cantorum honesto cetu sequestrātes tanqꝫ Epicureos a sobrio mensa castoqꝫ philosophorū dogmate. nec iniuria nam Homerus diuinus Poeta vbiqꝫ doctum et seria modulatū introducit cantorem vt apud Odysseam vbi Penelopē Phemiū fidicinē od neruos verba mouētem his verbis allocutam effingit.

Preterea illachrimans diuum est affata canentem
Phemi multa tenes hominum mulcentia pectus
Facta hominum atqꝫ deum: et que laudē autoribus addunt.
Ex iis pange aliquid.

Et quales Homerus probat: vos minime tales esse dubito vt qui duduꝫ a vobis prima musices rudimenta perceperim. Quapropter ad vos nostros labores examinandos cōmitto. quos eo libentius me suscepisse fateor: quo musicalē scientiā neqꝫ apud grecos neqꝫ latinos quidē vnqꝫ elementis traditam esse legeri: at introductiones qꝫplurimas inter quas ea omniū nobilissima est quam diuus Seuerinus Boecius sui monumentū reliquit. quem vnū in hac re preserti delegi meorū studiorū ducē. Si ergo probaueritis satis michi est. In re enim nostra molumus aliorū iudicia sequi: qꝫ propria probare. Valete.

Antiqui qui de musica scripserunt		Insignes ex recentiorib⁹ qui de cadē scripsere.
Democritus	Plato	albinus
Heraclides ponticus	aristoteles	Diuus Seuerinus
Thimotheus milesius	Theophrastus	Basilius
Philolaus Pythagoricus	Nichomacus	Hylarius
architas tarentinus	Aristoxenus	Augustinus
Duo Theodori	Ptolomeus	ambrosius
Xanthus atheniensis		Gelasius.

Argumentum quattuor librorū musices.

¶ Primus liber interualla musicis modulationibus acōmoda discutit. multiplex: duplare/ triplare/ quadruplore. superparticulare: sesqualterū/ sesquitertiū/ sesquioctauū/ bis sesquioctauū/ ter sesquioctauū/ quater sesqoctauū/ quinqꝫ et sexies sesquioctauū

¶ Secundus de tono/ integro toni dimidio/ semitonio minore/ semitonio maiore/ cōmate/ schismate/ atqꝫ diaschismate.

¶ Tertius de sesquitono/ ditono diatessarū/ diapente/ diapente et tono/ diapason/ diapason et trisemitonio/ diapason et ditono/ diapason et diatessarō/ diapason et diapēte/ diapason diapente et tono/ disdiapason/ ac integro toni et cōsonantiorū oīm dimidio. Et de maximarum Harmoniarum consonantiis: et quarundā medietatum.

¶ Quartus de monochordo/ tetrachordo/ pentachordo/ heptachordo/ octochordo/ pentadecachordo/ distonicis/ chromaticis/ enarmonicis melodiis. Et de melodiarū modis. et hec sub breuitate contracta: argumentū libri sunto.

¶ Jacobi Fabri Stapulensis Elementorũ musicaliũ ad clarissimum virum Nicolaum de haqueuille presidentem parisiensem liber primus.

Interuallum est soni grauis / acutiq; spaciorum habitudo.
Spacium vocamus neruũ / chordam / expiratum aerem / et quidquid simile est: a quo sonum elicimus.
Multiplex interuallũ est quoties maius spaciũ continet minus pluries. vt bis: et duplex interuallum dicitur. vt tertio: et dicitur triplex. vt quarto et quadruplex nuncupat̃. ⁊ hoc pacto deinceps
Interuallum superparticulare est cum maius continet minus: et partem eius aliquam.
Pars est que metitur totum: ipsum aliquoties sumpta restituens.
Si maius continet minus et eiusdẽ dimidium: sesqualterũ nominatur interuallum.
Si maius continet minus et minoris partem tertiam: dicitur sesquitertium.
Si vero cõtinet minus et eiusdẽ minoris partem octauã: epogdoum / sesquioctauũq; nominatur. Et ita reliqua superparticularia iterualla: perfacile est diffinire: sed parũ musico conducunt proposito.
Superpartiens autem diceretur interuallum: si maius contineret minus et minoris partes aliquot: que partẽ vnam non efficiunt.
Numeri sunt adinuicem primi: quos sola metitur vnitas.

Dignitates.

1 Quidquid metitur alterum: metitur et omne mensuratũ ab illo.
2 Compositum in ea resoluitur simplicia: ex quibus componitur.
3 Cuiuslibet numeri pars est vnitas: ab eo denominata.
4 Unitas in quemcunq; numerum ducta: ipsum producit.
5 Quidquid metitur detractum et residuum: metitur ⁊ totum.
6 Quecunq; vni et eidem equa sunt: ⁊ ea inter se sunt equa.
7 Et que inter se sunt equa: eiusdem sunt eque multiplicia aut submultiplicia.
8 Eorum quorum tota sunt equa: et dimidia sunt equa.
9 Quidquid bis auctum aliquid transcendit: id vltra illius dimidiũ esse necesse est.
10 Et quod duplicatum non implet integrum: id profecto non continet dimidium.
11 Omne totum est maius sua parte.

¶ Petitiones.

1 Data equali chorda: que spacij ad spaciũ proportio est: eam esse ⁊ soni ad sonum.
2 Inter numeros sola vnitate distantes: nullum intercipi posse medium.
3 Spacium quodlibet in quotlibet equas partes diuidere.
4 Totum ad suam partem / et laxius ad se tensum: grauiorem sonum edere.
5 Omnem proportionem esse tanq; numeri ad numerum.
6 Si numerus numerũ datum multiplicet: idemq; productũ diuidat: numerũ datũ redire
7 Si numerũ datũ numerus diuidat: ⁊ qd̃ puenit rursus multiplicet: numerũ datũ redire.
8 Extremorũ proportionẽ ex mediorũ proportionibus vt suis partibus esse compositã.
Extremi ordinatarũ proportionũ: maximus / minimusq; terminus intelliguntur.

¶ Sciẽtia subalternata qualis ad Arithmeticã Musica est: principiis et demõstratis scientie prioris subalternãtisq; vtitur. at studuimus vt q̃ fieri potest rarissime id in hac disciplina fiat. verum plerũq; vbi oportunũ videbitur alio q̃ in arithmeticis factũ est vtemur demõstrandi mõ: quo singula magis ex propriis facta videãtur q̃uis arithmetico suffragio atq; iis que in arithmeticis monstrata sunt eadem p̃prius faciliusq; fierent: attamen quando id fiet ⁊ quando nõ sequentibus demõstrationibus cuilibet per q̃ perspicuum euadere poterit.

¶ Si interuallum multiplex binario multiplicetur: id quod fit ex hac multiplicatione 1
interuallum multiplex est.

d	e	c	
16	8	4	Multiplex ex duplatione.
4	2		Multiplex interuallum.
A	B		

¶ Interuallum binario multiplicare: est interualli habitudinem duplare que quo pacto duplãda sit du dum tertia propositione quinti Arithmetices notum esse potest. vt si a b sit interuallum quodcũq; quod binario multiplicare iubeamur: ipsum per tertiam quinti multiplicabimus si ducimus a in se et b in se prouenianto; d c eritq; productorum d et c duplex interuallum interuallo producentiũ a b. Qd si rursum ducimus a in b proueniatq; productum e erit per sextam quarti que proportio d ad e ea dem e ad c et interuallum d c in duo equa partitum. Sed esto nunc vt interuallum a b sit multiplex quẽadmodum proponit propositio quod modo pauloante dicto: binario multiplicetur: fitq; duplum d c et ea proportio d ad e ⁊ e ad c: dico interuallũ d ad c esse multiplex. Nam cum a ad c multiplex sit interuallum cum geminatur manifestum est multiplex addi multiplici quare per vicesimãsecundam noni Arithmetices statim notum est interuallum compositum multiplex esse. ⁊ propositũ. Sed idem aliter hic demonstratur. Quoniã enim que proportio a ad b ea est d ad e et e ad c. nam vtraq; proportionis duplare a ad b medietas. Proportio aũt a ad b posita est multiplex: igitur et proportio d ad e multiplex est. metiẽ igitur per diffinitionẽ multiplicis: e ipsum d vel bis vel ter vel deinceps. Et eodẽ quoq; iure c toties metitur ipsum e. quare ⁊ c per primũ communẽ conceptũ etiam metitur ipsum a. Quicquid enim alterũ metitur: metitur et omne quod mensuratũ est ab illo. est itaq; per diffinitionẽ interuallum a c multiplex. quod erat ostendendum.

¶ Si fuerint termini ꝓportionaliter constituti: cum primus fuerit vltimo cõparatus 2
si primus vltimum fuerit mensus: metietur et secundum.

2	4	8	1	2	4	A b c tres termini proportio-
a	b	c	d	e	f	nales quorũ a numerat b.

¶ Tametsi hanc decimatertia quarti demõstret sufficienter: eam tamen ãplius hoc in loco volumus manifestare. Sint enim a b c termini proportionabiliter constituti et a numeret c: dico idem a numerare b. capio enim d e f terminos in ea proportione minimos. Quoniã enim d ad e vt a ad b: et e ad f vt b ad c. igitur per equam proportionalitatẽ quam vicesimaprima secundi Arithmetices monstrat d ad f vt a ad c. sed a per hypothesim metitur c: igitur et d metietur f. At quia d e f positi sunt in sua proportione minimi. ergo per quintam quarti d et f sunt adinuicem primi. Et cum d seipsum metiaẽ pariter et f per diffinitionẽ d est vnitas. At vero cum vnitas sit omnis numeri pars: d ergo metietur e Et cum a ad b vt d ad e: metietur igitur a ipsum b secundũ terminum: quod erat cognoscendum atq; propositum.

¶ Si interuallum binario multiplicatũ: multiplex effecerit interuallum: ipsum quoq; 3
multiplex erit.

2	4	8	A b interuallum binario multiplicatũ
a	b	c	multiplex efficiens.

¶ Hec est conuersa prime: cuius hec est ratio. Nam cum interuallum compositũ multiplex sit et per secundam cõmunem scientiam resoluatur in id interuallum ex cuius multiplicatione creuit siquidẽ compositũ omne: in ea simplicia dissoluitur ex quibus coalitũ (concretum) compositũq; esse cognoscit per sexagesimã noni interuallum simplex multiplex erit. At id idem aliter ostenditur. Nam si a b c geminatum interuallũ sit multiplex sic vt c multiplex sit ad a et ea proportio a ad b ⁊ b ad c: quoniã c ad a erit multiplex: a per diffinitionẽ metietur ipsum c. quare ⁊ per precedentem a metietur ipsum b. est igitur interuallum simplex b ad a per diffinitionem multiplex. et propositum.

4 ℭ Si terminorũ intervalli primus ad secundũ comparatus sese vt tertius ad quartũ habuerit: quot proportionaliter medij primo et secundo: totidem tertio ⁊ quarto intervenire necesse est.

E medium proportionale inter d et f tertium ⁊ quartum vt b inter primũ et secundum.

27	18	12		18	12	8		9	6	4		2
A	b	c		d	e	f		g	h	k		l

ℭ Hanc duodecima quarti monstrat cuius adhuc hic vt ad sequentia momentum habens: cognitio promptior habeatur: repetitur demonstratio.
ℭ Sit a cuiuscunque intervalli primus terminus ad c secundũ vt d tertius ad f quartũ: et sit b medius proportionaliter constitut⁹ inter a ⁊ c. dico etiam inter d et f intervenire vnum proportionalr mediũ. Capio enĩ per sextam quarti g h l₂ tres minimos secundũ proportionẽ a ad b et argumentor ex vicesimaprima secundi per equam proportionalitatẽ g ad h vt a ad b et h ad l₂ vt b ad c. igitur g ad l₂ vt a ad c. quare ⁊ vt d ad f. at si d et f sunt itidem termini cũ g l₂ manifestum iam est inter d et f intervenire vnũ proportionaliter mediũ. Sin minus: ergo per vicesimã tertiã Arithmetices g et l₂ metientur d et f equaliter: sitque id secundũ l. duco ergo l in g h et l₂ ⁊ proveniant d e f per septimam secundi d ad e vt g ad h et e ad f vt h ad l₂. quare e intervenit ꝓportionaliter medius terminis d ⁊ f: qđ erat mõstrandũ.

5 ℭ Superparticularis intervalli medius numerus: neque vnus neque plures proportionaliter intervenient.

M[illegible] proportio superparticularis: in duo equa diuidi non possit.

27		18						A c spacium superparticulare.
A	b	c.		d	e	g	f	D e f tres minimi proportionis a ad b.

ℭ Hanc intelligimus: nullum superparticulare intervallum in duas aut plures intervallorũ habitudines proportionesque secabile esse. quod demonstratione proxime subiuncta perque facile liquebit.
ℭ Sit a c intervallũ superparticulare quod diuidatur in duo equalium habitudinũ spacia a b ⁊ b c certis cõstitutisque numeris si possibile est: sitque iccirco vt a ad b ita b ad c. capio per sextã quarti arithmetices d e f tres minimos continue ꝓportionales in proportione a ad b. et qr d ad e vt a ad b et e ad f vt b ad c: ergo per equã proportionalitatẽ d ad f vt a ad c. atqui a ad c positũ est superparticulare intervallũ: igitur ⁊ d ad f est superparticulare. Atvero quoniam d e f sunt tres illius habitudinis minimi termini: igitur d et f primus ⁊ vltimus per primã quarti sunt adinuicẽ primi. At cũ d mõstratus sit superparticularis ad f: per diffinitionẽ d continet f et eius partem que ideo per diffinitionẽ metitur f. Et si ea pars sit numerus cum ea etiam per cõmunem conceptũ metiatur d: metietur enim se partem de tractam ⁊ residuũ quod equũ est f. non erũt ergo d et f adinuicem primi cuius oppositũ iam monstratum est ⁊ impossibile. erit ergo ea pars vnitas. Tunc addo vnitatem ipsi f ⁊ fiat g: vt g et f solius vnitatis discrimine distent mox argumentor d ad f vt g ad f. sed inter d et f positus est vnus intervenire medius igitur per precedentẽ ⁊ inter g et f numeros sola vnitate distantes intervenit intercipiturque aliquis numerus medius quod per secundã petitionem est impossibile. non igitur superparticularis intervalli vnus medius intervenit numerus. neque quoque eodem argumẽto intervenient plures. Et hãc etiam demõstrat sexagesimaprima noni. Et ex hac quoque cognoscitur reprehẽsionem demõstrationis Architereque nulla superparticularis in duo equa diuidi possit quam tertio institutionis musice capite vndecimo videtur diuus Severinus adducere nõ tam esse diui Severini que Nichomachi aut aliorũ quos interpretatur elegantissime qui ⁊ simile in plerisque tum Arithmetice tum Musice institutionis locis fecisse comperitur. Et non verentur quidã (pace omniũ dixerim) eius libros perlustrare non vt sciant sed vt exsurculent et canino more si quid hians/subsultansque appareat: aliud ventrem infigant/ mordeant ⁊ reprehendant et sanctũ ⁊ venerabile Philosophie nomen et suorũ conuiciis lacerent: et quod aliorũ vicium est si quod est: diui Severini exclament errorem faciantque aliorũ crimine reum. et cum nichil nor ntvolunt litterarios duces insectãdo/carpendo/laniãdo omnia scire videri: atque supra Philosophicos vertices sese gloriabundos extollere faciuntque quod est apud Comicũ ne intelligẽdo vt nichil intelligant quos idem statimvt maledicere desinãt ammonet malefacta ne cognoscant sua. Sed hec preter presentis negocij officium. de Philosophis enĩ qui recte fuerint natura instituti vel absque monitione semper recte cogitabunt qui enĩ secus faciunt ab eorum se segregant consortio et vt Philosophi quales se videri volunt non amplius esse cognoscantur necesse est.

¶ Si intervallum non multiplex binario multiplicetur: id quod fit ex hac multiplica 6
tione neque multiplex est / neque superparticulare.

9	6	4	A c intervallum neque multiplex neque superparticulare.
A	b	c	A c duplatum intervallum a b quod quidem est non multiplex.

¶ Sit intervallũ non multiplex a b: et duplum sit a c. ita ut ea sit proportio a ad b et b ad c. dico intervallum a c neque multiplex esse neque superparticulare. quoniã si a c primo ponatur multiplex: ergo per tertiã presentis et a b intervallũ erit multiplex at positum est nõ multiplex. Et si secundo dixeris a c esse intervallũ superparticulare cũ sit a ad b ut b ad c erit intervalli superparticularis medius proportionalis terminus quod per precedentẽ est impossibile. est itaque notum si intervallũ nõ multiplex binario multiplicetur compositum intervallum minime aut multiplex aut superparticulare esse. et propositum.

¶ Si itervallum binario multiplicetur: atque id quod ex ea multiplicatione creabitur
multiplex non sit: ipsum quoque non erit multiplex. 7

¶ Hec est conversa precedentis. Sit ergo superioris propositionis figura in qua intervallũ a c proveniat ex duplatione habitudinis intervalli a b et nõ sit a c intervallum multiplex. dico itidem intervallum a b nõ esse multiplex. Nam si a b intervallũ multiplex est: cũ a c per hypothesim ex intervallo a b binario multiplicato surgat: ergo per primã presentis intervallũ a c multiplex erit. at positũ est nõ multiplex: ergo si intervallũ non multiplex ex alicuius intervalli binario multiplicatione nascatur neque ipsum quoque ex cuius multiplicatione ortũ est multiplex erit: quod erat monstrandũ.

¶ A numero partiũ superparticularis intervalli que in unum adacte totum restituũt
et numero uno maiore: quot intervalli maiores termini simul: minoribus simul acce- 8
ptis respondeant: cognoscuntur.

A 3	4	5	6	7	8	9	
B 2	3	4	5	6	7	8	
C 2	3	4	5	6	7	8	
D 3	4	5	6	7	8	9	

¶ Sit a ad b intervallũ superparticulare manifestũ est per diffinitionẽ superparticularis a cõtinere b et unam partiũ b. ea igitur pars secundũ numerum c: constituat suum totũ b: et sit d numerus uno maior c: dico a sumpta secundũ numerum c equa esse b sumptis secũdum d. Nam a secundũ c sumpta continent b secũdum c sumpta et insuper partes b sumptas secundũ c. Atqui positũ est eas secundũ c constituere unũ b. igitur a secundũ c sumpta continent b sumpta secundũ numerũ uno maiorem c. At vero d positus est numerus uno maiore c. ergo a sumpta secundum c: continent b sumpta secundũ d. quod erat monstrandũ. ¶ Et si exemplarẽ requiris declarationẽ: si a ad b intervallũ est sesqualterũ: quoniã a sesqualterũ est ad b. ergo a continet b et eius dimidiũ: et duo dimidia per cõmune proloquiũ suum totũ reddunt. dico ergo duo a tantũ esse q̃tum tria b: quoniã enim duo a continent duo b. et insuper duo dimidia b que unũ b restituunt: ergo duo a continent tria b / tribusque evadunt equalia. Et si a ad b est sesquitertiũ a continet totum b et tertiam partẽ b. at tres tertie b eque sunt uni b. ergo superiore argumento tria a cõtinent quattuor b / quattuorque evadunt equalia. imo data quacunque superparticulari maiores termini secundũ proportionis minorẽ numerũ: equantur minoribus terminis secundum proportionis maiorẽ numerũ sumptis. ut si a ad b sit sesquiquinta: quoniã minimi sesquiquinte sunt 6 et 5. idcirco quinque a equi sunt sex b. et in nõ minimis quoniã 12 et 10 sunt termini sesquiquinte 10 a equantur 12 b. Et si a ad b sit sesquioctava: quoniã minimi sesquioctave sunt 9 et 8. idcirco 8 a tantũ sunt q̃tum novem b. Et quia rursum 18 ad 16 sesquoctava: ideo sexdecim a equi sunt 18 b. et ita in ceteris. Sed si id nõ modo particulariter sed et universaliter contẽplari cupis id universaliter verũ et it.

¶ Data quacunque proportione: maiores termini secũdum numerũ minorum sumpti:
equi sunt minoribus secundum numerum maiorum sumptis. 9

A Suppti	3	4	5	6	7	8	9	Multi-	2	3	4	5	6	Supp	5	7	9	11
B culares	2	3	4	5	6	7	8	plices.	1	1	1	1	1	tiētes.	3	4	5	6

¶ Ut sit a ad b quecunq proportio et a maior terminus: b vero minor. dico a sumptos secundū b numerum minorē equos esse b sumptis secundū a numerū maiorem. Nam per octauam primi Arithmetices quod fit ex a in b: equum est ei quod fit ex b in a. At vero quod fit ex a in b: sunt a sumpti secundū b, et quod fit ex b in a sunt b sumpti secundū a. igitur a sumpti secundū b equātur b sumptis secūdum a et in quibuslibet aliis eadē est demōstratio ꝛ propositū.

10 ¶ Cum aliquot maiores termini aliquot minoribus equi sunt: ea vnius maiorum ad vnum minorum reperitur ꝓportio: que ꝛ numeri minorum collectorum ad maiorum collectorum numerum.

¶ Hec est cōuersa p̄cedentis. Quoniā per precedētem minores collecti secundum numerū maiorum equi sunt maioribus secundū numerum minorū collectis. Sed numerus maiorū est vnus terminus maior et numerus minorū vnus terminus minor. ergo eadem est proportio vnius maiorū ad vnum minorū: que numeri minorū collectoꝝ ad numerū maiorum collectorū. ¶ Et quāq̄ he due vltime conclusiones faciles sunt: vsus tamē earum paulo latꝰ est. Per primā enim earū que nona est: habemus si numerus maior ad minorē sesqualter est vt trium ad duo: duo maiores equi sunt tribus minoribus. Et si maior ad minorē sesquitertius vt 4 ad 3: tres maiores equi sunt quattuor minoribus. Et si maior sesquiquartus vt 5 ad 4: quattuor maiores equi sunt quinq minoribus. Si vero maior sesquioctauus: octo maiores equi sunt nouē minoribus. ꝛ ita in cōsimilibus. In multiplicibus aūt si maior duplus est vt duorū ad vnum: vnus maior equus est duobus minoribꝰ. Si triplus: vnus maior equus est tribus. Si quadruplus: vnus equus est quattuor. Si octuplus: vnus equat ad octo. In superpartientibus vero consimile est: vt si maior est superbitertius vt 5 ad 3: tres maiores equi sunt quinq minoribus. Si supertriquartus vt 7 ad 4: quattuor maiores equi sunt septē minoribus. Si vero superoctupartiēs vt 17 ad 9: nouem maiores equi sunt decem ꝛ septē minoribus. et hoc pacto in reliquis. ¶ Ex vltima autem hanc in superparticularibus vtendi regulā elicimus. Si duo maiores equi sunt tribus minoribus quattuor ad sex/sex ad nouē/octo ad duodecī: vnus maior ad vnum minorē sesqualter est. Et si tres equi sunt ad quattuor: sex ad octo maior ad minorē est sesquitertiꝰ. Si quattuor maiores equi sunt quinq minoribus: aut octo ad decē: vnus maior vnius minoris est sesquiquartus. Si vero octo maiores nouē minoribus sunt equi: vnus maiorū ad vnum minorū cognoscit sesquioctauꝰ. In multiplicibus. si vnus duobus: duo ad quattuor/tres ad sex equi sunt: maior minoris est duplus. Si vnus tribus duo ad sex: vnus maior minoris est triplus. Si vnus ad quattuor et duo ad octo: vnus maiorū ad vnum minorū est quadruplus. Si vero vnus ad octo duo ad sedecim: maior minoris est octuplus. In superpartiētibus. si tres maiores equi sunt quinq minoribus: aut sex ad decē: vnus maior ad minorē est superbitertius. Si quattuor maiores septē minoribus: maior minoris est suptriquartꝰ. Si vero nouē equi sunt ad decem ꝛ septem: maior minoris est superoctupartiēs. Et in compositis numeris simile est. vt si duo a equi sunt quattuor b ꝛ dimidiū vnius: quēadmodum in duobus coniūctis sesqualteris. quoniā 4 et vnius dimidiū ad 2 duplū sunt et sesquiquartū: iccirco vnus a ad vnum b duplus est atq sesquiquartus. Si tres a equi sunt ad quattuor b et tertiā vnius: vt in duobus sesqtertiis quoniā quinq ꝛ tertia vnius cōtinent tres semel duas tertias et vnam nonam: proinde vnus a continebit b vnum duas eius tertias et vnam eius nonā. Si quattuor equi sunt ad sex et quartā vnius: vt in duobus iunctis sesquiquartis: quoniā sex ꝛ quarta vnius cōtinent quattuor dimidiā et decimam sextam ex quattuor: ideo vnus maior cōtinet minorē semel/eius dimidiū/ꝛ eius vnam decimāsextam. Si vero octo valent decē ꝛ octauam vnius vt in duobus sesquioctauis: quoniā decem continent octo et quartam: ꝛ octaua vnius ad octonos vna est sexagesimaquarta: ideo vnus maiorū continet minorē semel/eius quartā partem/et eius sexagesimāquartam. Et si cōpositionis series protensior euadit: vt si duo a equi sunt sex b/medietati vnius et quarte vt in coniūctione trium sesqualterorū: quoniā sex cōtinent duos ter ꝛ dimidiū vnius est quarta pars duorū: et quarta pars vnius est octaua pars duoꝝ. Iccirco vnus a triplex est b vnius insuper quartā atq octauam partē b continens. Et si tres equi sunt ad septem ꝛ nonā vnius quod in tribus sesquitertiis coniunctis euenit: quoniā septem: bis continent tres: ꝛ trium tertiā partem: et nona vnius ad tres est vicesimaseptima. ideo vnus maiorū continet minorem bis/eius tertiam/et eius vicesimāseptimam. Et si quattuor equi sunt septē dodranti vnius hoc est tribus quartis et insuper decimesexte vnius: vt in coniūctione trium sesquiquartoꝝ: quoniā septē cōtinent semel quattuor et tres quaternarū partes: et tres quarte vnius ad quattuor sunt tres decimesexte: ꝛ decimasexta vnius est ad quattuor vna sexagesimaquarta. iccirco vnus maior continet vnum minorē semel/et dodrantē ꝛ tres decimassextas atq vnam sexagesimāquartā. Si vero octo equi sunt ad vndecim/tres octauas vnius ꝛ vnam sexagesimāquartam: vt in tribus sesquioctauis ꝯiunctis: quā vndecim cōtinent semel octonariū et octonarii tres partes: ꝛ tres octaue vnius sunt ad octo tres sexagesimequarte. ꝛ vna sexagesimaquarta ad octo est vna quingētesima duodecima. hinc fit vt vnus maiorum cōtineat minorem semel/tres eius octauas/ tres sexagesimas quartas et vnam quingentesimā duodecimā. Et hec adiecimus quouſq harū duarum vltimaꝝ in sequētibus patentior manifestioq habeatur.

¶ Duplex intervallũ ex duobus maximis supparticularibus: sesqualtero atq̧ sesquitertio coniungitur. 11

6	4	3	A c duplex intervallum.
a	b	c	A b sesqualter. b c sesquitertius.

¶ Sint a b c intervallũ: a quidem sesqualter ad b: b vero sesquitertius ad c: dico a duplum esse ad c. Quoniã enim a sesqualter est ad b: ergo per octavũ huius duo a equi sunt ad tres b. et rursus quia b sesquitertius ad c: igitur per eandem tres b equi sunt quattuor c: et tres b positi sunt equi duobus a. duo igitur a equi sunt ad quattuor c. cum queq̃ʒ uni eidemq̧ equalia sunt inter se sint ꝛ equalia. et quattuor numerus minorũ collectoꝝ duplex est duorum numeri scʒ collectorũ maioꝝ. igitur per precedentẽ unus a duplex erit ad unũ c. qđ erat demõstrandũ potest ꝛ hoc ultimũ etiam demõstrari. Nã enĩ duo a equi sunt quattuor c: unus a per octavũ proloquiũ equus est duobus c. quoꝝ enĩ tota equa sunt et eorũ quoq̧ dimidia sunt equa. At duo c dupli sunt unius. igitur et unus a duobus c equus: duplex erit c unius quod fuisset monstrandum.

¶ Ex duplici intervallo atq̧ sesqualtero: triplex nascitur intervallum. 12

6	3	2	A c triplex intervallum.
a	b	c	A b duplex intervallũ. b ꝛ c sesqualterũ.

¶ Sint a b c intervallũ: et a quidẽ ad b duplex ꝛ b ad c sesqualter. dico a eius quod est c triplicẽ esse quoniã enim a ad b duplex est: ergo a per diffinitionẽ continet bis b. igitur a equatur duobus b. et q2 b sesqualter est ad c: igitur b continet c et eius partem dimidiã. ergo per octavam huius duo b equi sunt tribus c: et duo b equi erant uni a. igitur ꝛ tres c equi erunt uni a. tres autem triplex sunt unius. igitur per decimã unus a triplex est unius c: quod erat demonstrãdum.

¶ Duo duplicia intervalla: quadruplex coniungunt intervallum. 13

4	2	1	A c duplex intervallum
a	b	c	A c geminatũ duplex intervallũ

¶ Sit a duplex ad b: et b duplex ad c. dico quoniã a quadruplex est ad c. Nam quia a duplex est ad b: igitur duo b equi sunt uni a. et rursus q2 b duplex est ad c: igitur duo c equi sunt uni b. et si duo c equi sunt uni b: quattuor c equi erunt duobus b at duo b positi sunt equi uni a: igitur et quattuor c equabuntur uni a. at quattuor quadruplũ sunt unius. igitur per decimam unus a quadruplex est unius c: quod erat ostendendum.

¶ Terminũ reperire: ad quẽ quotcunq̧ volumus: liceat supparticulares assignare. 14

9	8	6	A ad c sesqualter.
a	b	c	B ad c sesquitertius

¶ Sit propositũ terminum reperire ad quem sesqualterũ ꝛ sesquitertiũ valeamus assignare. Capio duo ꝛ tria numeros denominãtes partes sesqualteri atq̧ sesquitertiĩ: duo sicu᷑ dẽ sesqualterũ et tria sesquitertiũ denominãt. ꝛ duco duo in tria: proveniatq̧ ductu illo c. manifestum est c habere partem dimidiã pariter ꝛ tertiam. iungo ad c partẽ eius dimidiã. ꝛ compositus sit a. et iterũ ad c iungo partẽ eius tertiã: et sit cõpositus b. quoniã enim a continet c et eius partem dimidiã: ergo per diffinitionẽ a ad c sesqualter est. et quoniã b continet c et eius partem tertiã: b itidem ad c sesquitertius. c igitur repertus est terminus ad quẽ petiti superparticulares rite sunt assignati. et hac lege de quibuslibet esset operandũ: ut si essent assignãdi sesquioctavus et sesquinonus duc octo in novẽ ꝛ surget terminꝰ octavam/nonãq̧ partem possidens: ad quẽ ꝛ sesquioctavũ et sesquinonũ rite assignaveris. et eodem quoq̧ pacto modo tres: modo quattuor aut quotquot libuerit ad eundem terminum assignabis.

640	600	576	540	480
a	b	c	d	

ut si ad eundẽ terminũ peterentur assignari sesquitertius/sesquiquartus/sesquiquintus. ꝛ sesquioctavus ducãtur tria/quattuor/quinq̧ et octo in seinvicẽ ꝛ proveniat e qui circo habet in se tertiã/quartam quintã et octavam. e adiungo e suam tertiã compositusq̧ sit a. et suam quartã ꝛ compositus sit b. suam quintã compositus sit c. suã deniq̧ octavã ꝛ ꝯpositus sit d. dico demõstratione superiore: quoniã ad e constituti sunt a b c d sesquitertius/sesquiquartus/sesquiquintus/et sesquioctavus: quẽadmodum prefixa monstrat formula.

15 ¶ Si sesqualtero interuallo sesquitertium demptum fuerit interuallum: erit qd relinquitur sesquioctauum.

9	8	6	a c sesqualter. b c sesquitertius.
a	b	c	a ad b sesquioctauus.

¶ Sit c terminus ad quem per precedentem assignati sint a sesqualter: et b sesquitertius. Ab a c sesqualtero subduco interuallum sesquitertium b c: relicto interuallo a ad b: quod dico esse sesquioctauum. quoniam enim a eius quod est c est sesqualter: a semel habet c et eius dimidiam partem. quare per octauam huius duo a equi sunt tribus c. et quattuor a sex c. et octo a ad duodecim c. Rursus quoniam b huius quod est c sesquitertius est. b igitur habet in se c et eius tertiam partem. quo fit vt per eandem octauam tres b equi sint quattuor c. et sex b octo c et nouem b ad duodecim c. at octo a quidem equi erant ad duodecim c igitur octo a equi sunt ad nouem b. per decimam igitur a continet b et eius octauam partem. estque a sesquioctauus ad b et propositum.

16 ¶ Interualli quarta et duodecima: vnam eius tertiarum restituunt.
¶ Nam quattuor interualli quarte: totum complent interuallum. et duodecim eiusdem interualli duodecime: totum itidem complent interuallum. quare quattuor quarte et duodecim duodecime adinuicem equantur. due igitur quarte sex duodecimis: et vna quarta tribus duodecimis sunt eque. quorum enim tota equa sunt: et eorum dimidia. At quattuor duodecime: duodecim duodecimarum sunt vna tertia: quare et vna totius tertia cui quidem duodecim ille duodecime cognoscuntur esse idem atque eque. vna igitur totius quarta quam tribus duodecimis equa esse monstrata est et vna duodecima illi adiuncta: totius tertiam partem restituunt. Equantur enim vna tertia et vna duodecima quattuor duodecimis. quod erat demonstrandum. Et quamuis hec demonstratio sequentia gratia particulariter facta sit: possis tamen modo consimili monstrare omnem minorem cuiuscumque totius interualli partem: proxime maiorem partem efficere: illi adiecta vna partium a numero qui ex ductu denominationum vtriusque partium enascitur: denominata. vt totius tertia pars minor est: et secunda proxime maior: et si duo in tria duxeris sunt sex: iccirco vna tertia atque vna sexta vnam restituunt secundam. Similiter quoque quarta et quinta partes sunt proxime maior atque minor: et si ducis quinque in quattuor surgunt viginti: proinde vna quinta et vna vicesima: vnam quartam restituunt. et hoc pacto in sequentibus vt subiecta monstrat formula.

Tertia et sexta	vnam secundam efficiunt.
Quinta et vicesima	vnam quartam.
Sexta et tricesima	vnam quintam.
Septima et quadragesimasecunda	vnam sextam.
Octaua et quinquagesimasexta	vnam septimam.
Nona et septuagesimasecunda	vnam octauam.

17 ¶ Due proportiones sesquioctaue: minores sunt sesquitertio interuallo.

81	72	64		a c duo sesquioctaui coniuncti.
a	b	c	d	a d sesquitertium interuallum.

¶ Continua per sextam quarti Arithmetices duas sesquioctauas inter a et c: ita vt a sesquioctauus sit ad b: et b sesquioctauus ad c. et sit a ad d sesquitertium interuallum. dico a ad c minus esse interuallum: quam a ad d. Quoniam enim a sesquioctauus est ad b: ergo per octauam huius octo a equi sunt ad nouem b. sed et quia b etiam sesquioctauus est ad c: per eandem octo b tantum sunt atque nouem c. Et cum vnus b equus sit vni c et octaue eius: ergo nouem b equi sunt decem c et octaue vnius c. Atqui nouem b monstrati sunt equi esse octo a: igitur octo a equi sunt decem c et octaue vnius. at decem et octaua vnius continet octo semel: et eius quartam et eius vnam sexagesimamquartam. ergo per decimam huius vnus a continet vnum c: vnam eius quartam: et vnam sexagesimamquartam: et vna quarta et vna sexagesimaquarta per precedentem minus sunt vna tertia: complent enim quarta et duodecima vnam tertiam. duo igitur sesquioctaui minus sunt vno sesquitertio interuallo. quod erat demonstrandum.

18 ¶ Tres sesquioctaui: amplius sunt sesquitertio: minus autem sesqualtero interuallo.

729			512	a d tres sesquioctaui coniuncti
a	b	c	d	

¶ Sint a b c d tres coniuncti sesquioctaui: vt a ad b primus sit sesquioctauus: b ad c secundus: et c ad d tertius: dico primo a ad c amplius esse sesquitertio. Quoniam enim a ad b et b ad c duo sunt sesquioctaui: ergo per octauam huius octo a equi sunt decem c et octaue vnius. Sed et cum c iterum ad d positus sit sesquioctauus: ergo per eandem octo c equi sunt nouem d: et nouem c equi decem d et octaue vnius: et decem c equi vndecim d et duabus octauis. et cum octo octaue c contineant nouem d: quare per decimam huius vna octaua c continet octauam d et eius octauam partem: hoc est vnam sexagesimamquartam. decem ergo c et vna octaua vnius equantur vndecim d: tribus octauis: et vni sexagesimequarte. et per decimam vt vndecim tres octaue et vna sexagesimaquarta ad octo: ita a ad d. sed vndecim continent octonos semel tres eorum

partes/tres octauas/et vnã sexagesimãquartam vnius. ac tres octonorũ partes amplius sunt tertia eorũ parte. Superãt enĩ tres octonariũ partes: tertiam eiusdẽ partem triente vnius: hoc ẽ tertia vnius parte. a fortiori igitur tres octonorũ partes/et tres octaue vnius ⁊ vna sexagesimaquarta ita ãplius sunt tertia octonorum parte. cõtinent ergo vndecim/tres octaue vnius/⁊ vna sexagesimaquarta: octo semel ⁊ amplius eorũ parte tertia. quare ⁊ a cõtinet d ⁊ ãplius tertia eius parte. est itaqꝫ a ad d ãplius sesquitertio interuallo. Scdo dico a ad b minorem eẽ sesqualtero interuallo. Nam vndecim ꝯtinẽt octo ⁊ tres octauas: deest ergo vna octaua ad complẽdas quattuor octauas: q̃ sunt octonorum dimidium. At vero q̃ superãt: tres octaue vnius/et vna sexagesimaquarta minus efficiũt dimidio vnius octaue. quare ⁊ multo minus efficient vna octaua. vndecim ergo/⁊ tres octaue/⁊ vna sexagesimaquarta vni⁹: cõtinent octo semel et minus octonorũ dimidio. ergo per decimam huius ⁊ a cõtinet d semel ⁊ minus eius dimidio. est itaqꝫ interuallum a ad b minus sesqualtero interuallo.

¶ Quattuor sesquioctaui coniũcti: sesqualterum superant interuallum. 19

6561				4096	De quattuor sesqui-
a	b	c	d	e	octaui coniũcti.

¶ Sint a b c d e quattuor ꝯiũcti sesquioctaui: a ad b ꝑmus/b ad c secundus/c ad d tertius/⁊ d ad e quartus: dico q̃m interuallum a e amplius est sesqualtero interuallo. Nam vt in precedẽti visum est octo a equi sunt vndecim d/tribus octauis/⁊ vni sexagesimequarte vnius. et vndecim d/tres octaue vnius ⁊ vna sexagesimaquarta: equãtur duodecim e/sex octauis/quattuor sexagesimis quartis/⁊ vni quingentesime duodecime. ergo octo a equi sunt duodecim e/sex octauis/ quattuor sexagesimis quartis/ et vni quingẽtesime duodecime. At vero duodecim/sex octaue/q̃ttuor sexagesimequarte/et vna quingentesima duodecima cõtinent octo semel et amplius q̃ octonorum dimidium: q̃m cõtinẽt octo semel ⁊ dimidium: et insuꝑ sex octauas/quattuor sexagesimasquartas/⁊ vnã quingentesimã duodecimam vnius. igitur per decimam huius a cõtinet e semel ⁊ amplius q̃ eius dimidium. suꝑat itaqꝫ a e interuallum quattuor sesquioctauis ꝯiũctũ: sesqualterum interuallum. quod erat monstrandum.

¶ Quinqꝫ coniũcti sesquioctaui: minus duplici interuallo coniũgunt. 20

¶ Nam ꝑ vndecimam huius duplex interuallum ex duobus maximis superparticularibus: sesqualtero et sesquitertio ꝯiũgitur. at ꝯstitutis quinqꝫ sesquioctauis tres ꝑmi sesquioctaui: per decimãoctauã huius minus sunt sesqualtero interuallo. ⁊ duo sequẽtes sesquioctaui qui vna cũ tribus ꝑoribus quĩqꝫ cõplent: per decimãseptimam huius minus sunt sesquitertio. coniũgunt igitur quinqꝫ sesquioctaui minus duplici interuallo.

¶ Sex proportiones sesquioctaue: maiores sunt vno duplici interuallo. 21

531441						262144	De g sex sesqui-
a	b	c	d	e	f	g	octaui cõiũcti.

¶ Sit a g interuallum sex ꝯiũctorũ sesquioctauorũ: itavt a ad b sit ꝑmus sesquioctauus/b ad c secũdus/c ad d tertius/d ad e quartus/e ad f quintus: f aũt ad g sextus. dico q̃m a ad g amplius est duplici interuallo. Cũ enĩ a ad b sesquioctauus est: ergo per octauã huius octo a equi sunt nouem b. et nouem b per eãdem equi sunt decem c/⁊ octaue vnius. et decem c ⁊ octaua vnius: equa sunt vndecim d/tribus octauis/et vni sexagesimequarte vnius. et vndecim d/tres octaue/et vna sexagesimaquarta vni⁹: equãtur duodecim e/sex octauis/q̃ttuor sexagesimis quartis/ et vni quingentesime duodecime. duodecim aũt e/sex octaue/quattuor sexagesimequarte/et vna quingentesima duodecima: equantur tredecim f/decem octauis/decem sexagesimisquartis/quinqꝫ quingẽtesimis duodecimis/et vni quarte millesime nonagesimesexte. At vero decem octaue vnũ cõtinent integrum ⁊ insuꝑ duas octauas. quo fit item vt duodeci e/sex octaue/q̃ttuor sexagesimequarte/⁊ vna quingentesima duodecima: equẽtur q̃ttuordeci f/duabus octauis/decem sexagesimisquartis/quinqꝫ quingentesimis duodecimis/et vni quarte millesime nonagesimesexte. At vero q̃ttuordecim f/due octaue/decem sexagesimequarte/quinqꝫ quingẽtesime duodecime/et vna quarta millesima nonagesimasexta: equa sunt quĩdecim g ⁊ octo octauis eius (hoc est equa sunt sedecim g) duodecim sexagesimisquartis quindecim quingentesimis duodecimis sex quartis millesimis nonagesimissextis/⁊ vni tricesimesecũde millesime septĩgẽtesime sexagesime octaue. At sedecim ⁊ duodecim sexagesimequarte ⁊ reliquẽ sequẽtes particule: continent octo bis et amplius. igitur per decimã huius a ad g maius ẽ duplici interuallo. sex igit sesquioctaui maiores sunt vno duplici interuallo: vt intẽdit ꝑpositio. ¶ Et si hec ꝑpositio quo ad suã demõstratiõẽ nõnullis subdifficilior videat: hoc iccirco ꝑuenit q̃ illis ꝓmptitudo/vtẽdiqꝫ habilitas octaue/none/⁊ decime hui⁹ deerit. iccirco par/cõsentaneũqꝫ erit eos qui in musicis modulatiõibus ⁊ earũ ꝯtẽplatiõibus se exercitare volent: multos sesqualteros/deinde sesquitertios/et alios sequentes superparticulares colligere: quousqꝫ vsus colligendarũ ꝑportionũ ipsis iam sit factus ꝑius/patensqꝫ ⁊ q̃si iam ipsis domesticus.

¶ Primi Elementorum Musicalium finis.

Onsonātia est soni grauis/acutiq; mixtura: suauit/ vniformiterq; auribus
c incidens: ex multiplici aut supparticulari ratione pfecta [redacted]. ¶ Dissonātia est duorum sonorum non se natura suauiter miscentium: ad aurem perueniens aspera/iniocūdaq; percussio. ¶ Tonus est consonātie principiū: et soni ad sonum sesquioctaua pportione perueniens. ¶ Semitonium minus qd et diesis dicit: est toni pars: qua sesquitertia pportio duobus tonis maior est. ¶ Semitoniū maius quam et vocant Apothomen: est toni reliqua ps: et qua ipe semitoniū minus supat. ¶ Comma est quo sesquioctaua pportio: duobus semitonijs minoribus maior est: qd et idem est quo Apothome semitonium minus vincit ac superat ¶ Schisma est cōmatis dimidiū. ¶ Diaschisma ē dimidium semitonij minoris. ¶ Hemispherium: musicū est instrumētum per qd aut neruo aut chorde vt decet supposito: semitonia/tonos/ psonātiasq;/ et consonāntiarū particulas: ad sensum puestigamus. ¶ Sonus emmelis is est quo apte vtimur in melo. ¶ Ecmelis vo is dicitur: quē melos/concentusq; non admittit. ¶ Equales soni atq; similes dicūtur: q ex eadem interualli pportione nascitur ¶ Numerorū atq; interuallorum pars ea maior est: que a minore nūero denoiat. et mior que denoiatur a maiore. ¶ Multiplex pportio maior est: quā maior denoiat numerus. et minor: que denoiatur a minore. ¶ Supparticularis pportio maior est: que a maiore denomiatur parte. minor aūt: que denominatur a minore.

1 ¶ Tonum super datam chordam collocare.

a c| | | | | | | | b|

¶ Sit a b c chorda quecūq; supra quā iubeamur tonū collocare: diuido p tertiam petitionem chordā a b in nouem equas portiones: ita vt c b illar nouenarū octo teneat et a c vnam. dico q a b et c b tonū ptinēt/ psitutūq; supra datā chordam esse tonum. Nā totū chorde spaciū a b ptinet spaciū c b et insup octauam eius partē: q a c vni illar octauar equa sit. igit per diffinitiōem spaciū a b epogdoū: sesquioctauūq; est spacio c b. quare per primam petitiōem ea erit soni totius chorde a b ad sonum c b pportio. Est itaq; tonus in chorda a b qui in epogdoa/ sesquioctauaq; ratione consistit: collocatus.

2 ¶ Tonum tono et quotquot libuerit in data chorda subiungere.

a c| d| e| | | | | | | | | b|

¶ Sit data chorda a b in qua ppositum sit tres psequētes tonos subiūgere partior per tertiam petitionem vt in precedēti factum est spaciū totius chorde a b in nouem equas portiōes. et in nota octaue portionis pono c: ita vt b c octauas illar nouem partium teneat. manifestū est per precedētem a b et c b esse tonum et per eādem petitiōem partior spacium c b in nouem equas portiōes. et in tertio octaue particie pono d: ita vt d b ptineat octo ear partium quar c b nouem ptinet. per precedentem c b ad d b sonat tonum/ estq; iam vni tono: tonus vnus subiectus. Rursum spacium d b psimili modo in nouem equas portiōes diduco: et notam octaue sectionis littera e designo: ita vt e b octo ear partiū cōtineat: quar d b ptinet nouem per precedentem d b ad e b resonat tonum. sunt igitur in data chorda a b tres ptinue subiecti toni: scz a b/c b. c b/d b. d b/e b. qd erat ppositum. et hoc pacto quotquot lubet subiūgere q facillimū est. Et si id sensu experiri/ deprehēdereq; cupias post pulsū tonꝰ chorde a b suppone hemispherium chorde a b in signo c: ita vt sola perstrepat resonetq; particula c b et sensus iudicio deprehendes soni totius a b ad sonū c b esse toni iteruallū. q si hemispheriū trāsferas ad notam d: ex pulsu c b et d b iterū tonum deprehēdas. sed ex totius a b sono ad sonū particule d b duos tonos/ duorūq; tonorum infualliū perpendet auditus. et hoc pacto sensuum iudicijs quotqt voles tonos dephendēdos cōmitteres: et eor mixturas tum suaues/ tum incōcinnas (quas auditus tanq offensus horret refugitq;) decernendas.

3 ¶ Tonorum continuatorum: minimos numeros assignare.

59049	52488	46656	41472	36864	32768	Quinq; tonorum adinuicem conti-
n	o	p	q	r	s	nuatorum minimi numeri.
6561	5832	5184	4608	4096		Quattuor tonorum adinuicem cō-
h	i	k	l	m		tinuatorum minimi numeri.
729	648	576	512			Trium tonorum adinuicem conti-
d	e	f	g			nuatorum minimi numeri.
81	72	64				Duorum tonorum adinuicem con-
a	b	c				tinuatorum minimi numeri.

¶ Si duo/ tres/ qttuor/ quinq; aut quotlibet toni sint ptinue in neruo psitoti: sic eor minimos nūeros reperiemus. Qm eni nouem et octo mimi sunt numeri toni duco nouem in se et pueniat a: et nouem in

octo: et proueniat b: et octo in c: et proueniat c. per vicesimamtertiam tertii Arithmetices inter a b et b c sunt duo sesquioctaui in minimis numeris constituti: et proinde duo toni in minimis numeris continuati. Et si nouem duco in a b c et octo in c et surgant d e f g. per eandem inter d e f g tres sunt in minimis numeris sesquioctaui constituti: quare d e f g sunt trium continuatorum tonorum minimi numeri. Et si duxero nouem in d e f g et octo in g et surgant h i k l m per idem quod prius h i k l m quattuor continuorum sesquioctauorum minimi sunt numeri: quare et quattuor continuorum tonorum. Et si rursum hoc pacto duxeris nouem in h i k l m et octo in m et surgant n o p q r s: ipsi erunt quinque continuorum tonorum minimi numeri. et hoc modo quotquot tonorum voles minimos numeros reperias. Uerumtamen in modis musicis tot continue subiungere opus non est: sed tonis semitonia subiunguntur: de quibus posterior proprius accommodusque expectandus est sermo.

¶ Spacio quolibet per quotlibet equa spacia diuiso: totius ad totam prime sectionis partem minor est proportio: quam eiusdem partis ad totam reliquam prime sectionis partem. Quo fit vt quanto tonus tono subiungitur acutior: tanto ipsum contractiora contineat spacia. 4

a	c	d	e	f	g	h	i	k	b

¶ Chordam neruum tibiam/ eneum aera/ es tinnulum et quicquid sonum edit in harmonicis modis (vt iam quoque dictum est) spacium nuncupamus: in quibus analogie ratio vim naturamque seruat eandem. Sit ergo a b totum spacium per a c: c d: d e f: et reliquas nouem equas partes vt fit in interuallo toni habendo diuisum: quotque enim alias posueris idem valuerit. dico minorem esse proportionem a b ad c b quam c b ad d b. Nam cum a b positum sit in nouem equas partes per medias notas c d e f et reliquas diuisum: c b continet solum earum partium octo: quarum a b continet nouem. ergo a b continet spacium c b et eius octauam partem. sed et cum c b octo partes parti c d equas contineat: ergo d b continet partium earum solum septem. ergo c b continet spacium d b et insuper eius septimam partem. at octaua pars per diffinitionem minor est parte septima: igitur iterum per diffinitionem a b ad c b proportio superparticularis minor est quam c b ad d b vtpote que a minore parte denominetur. est enim hec a septima parte sesquiseptima proportio: illa vero ab octaua sesquioctaua. Et hoc non modo in superparticularibus: verum et quibuslibet medietatibus demonstrat prima decimi Arithmetices vbi scilicet ratio medietatisque arithmetica comperitur. quod et in dicta spacii diuisione et sumpta (vt propositum est) proportione inuentum conspiciebatur. ¶ Corrolarium vero hinc cognoscitur quod totum per quartam petitionem ad suam partem grauius sonat: pars autem ad suum totum acutius. Itaque si tono a b et c b tonum subiunxeris: subiunctus erit acutior. Et quoniam spacium c b in nouem equas partes partitur: quarum quelibet minor erit spacio c d quod eius octaua est: nam quelibet earum est nona et a maiore numero denominata. erit igitur et quelibet earum nouem partium minor spacio a c. equa sunt enim a c et c d. et hoc pacto de quibuslibet subiectis acutioribus tonis est dicendum. manifestum est igitur vt quanto tonus tono subiungitur acutior: tanto ipsum contractiora contineat spacia.

¶ Medio extremitatum toni spacio in duo equa diuiso: tonus minime in duo secatur equalia. 5

a	c	d	e	f	g	h	i	k	b
l	m	n	o	p	q	r	s	t	

¶ Hec et sequentis intelligitur vt tonus minime in duo equa ratione geometrica dirimatur: non autem arithmetica. nam et hic tonus tonique interuallum in duo equa ratione arithmetica direptum est. diuido ergo spacium a b vt prius in nouem equa spacia: per notas a/c/d/e/f/g/h/i/k/ b manifestum est a b et c b esse toni extremitates/ tonumque continere. dico ergo quoniam a c medio harum extremitatum interstitio in duo equa per signum l direpto: tonus minime in duo equa partitur/ quoniam sonus a b et l b equalis non sit l b et c b. diuido enim singula reliquorum octo equalium spaciorum consimili modo per equalis per notas m/n/o/p/q/r s/ t: manifestum est totum spacium a b diuisum esse in 18 equalia spacia que sunt a/l/c/m/d/n/e/o et reliqua. ergo per precedentem minor est proportio a b et l b quam l b et c b. est enim hec sesquisextadecima: illa vero sesquiseptimadecima. non est ergo tonus hoc pacto in duo equa diuisus. et soni a b l b/ et l b c b per diffinitionem adinuicem inequales: quiquidem soni ecmeles sunt/ musicoque melo perparum apti.

¶ Toni spacio hoc modo diuiso: totius medie sectionis sonus: maioris extremi toni sonum acumine: minoris vero grauitate superat. 6

a	c	d	e	f	g	h	i	k	b
l									

¶ Sit a b vt in precedenti iam dictum est diuisum: itavt a b ad c b recrepet tonum. dico quoniam sonus l b acumine superat sonum a b. quoque idem sonus l b grauitate vincit c b. Nam a b totum est et l b eius pars: ergo per quartam petitionem a b grauiorem sonum edit et l b graciliorem. et per eandem quoniam l b totum est ad c b: sonus l b grauior est sono c b. superat ergo l b maius toni extremum acumine: et minus grauitate. quod propositum erat demonstrandum.

¶ Tonum in duo equa: certo/ constitutoque numero diuidi impossibile est. 7

¶ Nam per quintam primi huius nullum superparticulare interuallum in plura equalia dirimitur: et que proportio spaciorum inequalium inter se ea quoque est et soni ad sonum. Atqui tonus ex superparticulari nascitur interuallo. nascitur enim ex epogdoa/ sesquioctauaque ratione. igitur tonus minime in duo equalia dirimitur/ diuiditurque. imo vero neque in plura duobus equa: vt in tria aut quattuor. ¶ Ex quo facile cognoscitur Aristoxenus musicus aurium iudicio cuncta committens perparum esse probandus. qui semitonia secus quam Pythagorici non arbitratur esse dimidio tono contractiora: sed quemadmodum semitonia dicuntur: ita quoque esse integra tonorum dimidia. Nec minus Martianus felix simili lapsus errore deprehenditur: qui nonmodo

tonum in duo equalia:sed ⁊ in tria/ ⁊ quattuor dirimit atqꝫ secat. Secat enī in primis tonum in duo equalia q̄ iccirco hemitonia vocat. Secūdo in tria ⁊ eaꝝ tertiaꝝ quālibet diesim triemeriā nūcupat. Tertio in quattuor ⁊ hāc toni partem quartā :vocat diesim tetartemeriam:q̄ he dieses nūc tertie nūc quarte toni sunt partes. Est enī tritos tertius/tetartos quartus/ ⁊ meros pars. Ponit ⁊ tertiaꝝ dieseos acceptiōem vt eaipsa toni tertia ⁊ tertie dimidia pars dicat. Et rursum primi modi primeqꝫ acceptiōis dieses:chromaticas vocat/secūdas vocat enermonicas tertias ꝟo enarmonice diuisionis hemiolias:partim Aristoxeno similiter:partim aūt dissilit. Similit quidē q̄ Aristoxenus toni dimidiū semitoniū ponat et toni tertiam diesim chromaticam vocet sed chromatis mollis: ⁊ toni quartā diesim enarmonicam.at dissiliter q̄ toni quartam cū ꝓꝓa quarte medietate vocet diesim chromatꝭ hemioliū. Et certe vel Martianꝰ in tertia dieseos acceptiōe nouo errore lapsus putādus est:vel eūdem putasse hemitoniū ⁊ diesim enarmonici hemtoliū idem esse.nam cū oīe totum tribus suis tertijs integretur: vnam ergo tertiaꝝ ⁊ tertie medietatem totius dimidium implere necesse est. Sed cū hec se satis falsa esse ꝓbant/ ⁊ nulla sui pte coherēāt:nō est cur in his diutius sermo sit ꝓtrahēdus. Sic enī qui stolidū sensus iudicium sequētes intellectum relinquūt:facile ex disciplinarum aditis se explosos sentiunt.

8 ¶ Quicunqꝫ numerus in terminos toni ducatur:interuallum toni relinquet.

¶ Nam cum tonus ⁊ toni interuallum in ꝓportione sesquioctaua ꝯsistat: sui termini erūt nouem ac octo aut quicūqꝫ alij qui sibi sibi ꝓportiōe respōdeant. At cū per septimā secūdi Arithmetices:si vnus idēqꝫ numerus duos multiplicet ꝓductorū ⁊ multiplicatorū eadem sit ꝓportio:ergo quicūqꝫ nūerus ducat in terios sesquioctaue:sesquioctauam ꝓducet/relinquetqꝫ tonum atqꝫ toni interuallū.quod est ꝓpositū. Et nō modo de sesquioctauo ⁊ toni interuallo idsentiēdum est:sed ⁊ de quolibet alio interuallo.

9 ¶ Omnis numerus:extremorum toni differentia constitui potest.

¶ Si enī tonus in mīmis ꝯstituat vt sunt nouem atqꝫ octo monas differentia est:cū nouenarius atqꝫ octonarius sola vnitate dissentiāt. Et si ducat binarius in nouenariū ⁊ octonarium et ꝓducātur a ⁊ b per precedētem a ⁊ b erūt toni extrema. At ꝟo per nonam primi Arithmetices quod fit ex binario in nouenarium tm̄ est q̄tum quod fit ex binario in octonarium ⁊ vnitatem.sed binarius in vnitatem per cōmune ꝓloquiū seipm̄ ꝓducit:igitur extremorum toni a ⁊ b binarius differētia cōstituit. Et si ducatur ternarius in nouem ⁊ octo:eodem quoqꝫ argumēto ternarius extremorū toni differētia cōstituet. Et ita quicūqꝫ alter numerus in eosdem mīmos toni terios ducet:idem extremoꝝ toni differētia ꝯstituetur. Manifestum itaqꝫ est oēm numerum extremorū toni differētiam ꝯstitui posse. Et quāq̄ ita est placuit tn̄ Philolao Pythagorico primordiū toni/primordialēqꝫ eius dīam ternarium cōstitueret qui p̄mus cubū a p̄mo impari numero ꝓcreat/ac gignit. q̄ is numerus apud Pythagoricos maxie honorabilis fuerit. Nam cū ternarium primū quidē imparem nūerū tertio duxeris:nouem ꝯsurgūt. que ter ducta septem supra viginti:sez cubum a p̄mo impari reddunt.at 27 ad 24 tono distant/ toniqꝫ claudūt interuallum:et horū differētia ternarius ꝯstituit.est enī ternarius summe 24 pars octaua:q̄ eidem adiecta summe:primū a ternario cubū rursus instaurat atqꝫ pficit. Et idem Philolaus summā septem ⁊ viginti in duas partes secuit 13 ⁊ 14 quaꝝ hec maior/illa ꝟo minor habet/ et hāc primordiū Apotomes facit:q̄ est toni portio maior :illam aūt facit principium dieseos:que est toni decisio mior atqꝫ portio: ⁊ quā posterius semitoniū minus nūcupabimus.et illaꝝ duarū partium differētiam que est vnitas facit cōmatis principium. Sed de his satis.

10 ¶ Numeri dati partem quotācunqꝫ reperire. Quo fit vt cuiuslibet nūeri pars ab ipso sit numerata:et a denoiante eiusdem partis sit denominata.

272	17	306	18	136	17
c	d	g	h	m	8
17	16	18	17	17	8
A	b	e	f	k	l

¶ Quiuis enī numerorum numerātium qui exēplares in aīa sunt:vnitas insecabilis existat:nūeroꝝ tn̄ numeratoꝝ quales in physicis sunt motuū nūeri/in geometricis lineaꝝ ⁊ planorū/in astrologicis temporū/in musicis aūt tonorū atqꝫ interuallorū vnitas aut verius vnum sectiōem recipit. Sit ergo a quicūqꝫ numerus cuiꝰ vna partium denoiata ab b q̄sita sit:resoluo a in oēs suas partes denoiatas ab b: ducendo scz denoīantem numeri a in denoiantē partis b:ita vt ꝓueniat c. manifestū est partes c simul denoīatas ab b equari toti numero a.diuido igit c per b ⁊ ꝓueniat d:dico d esse partē petitam/ ⁊ numeratam ab a.hoc est a nūero denoiante a. Qꝛ eī sit pars a denoīata ab b q̄ petita erat:patet qꝛ a in d per septimam petitiōem reproducit c:quare d est pars c denoiata ab b.at c equat a.igitur ⁊ d ps est a denoīata ab b. Sed ⁊ q̄ d numeretur ab a:pꝫ.qꝛ a in b ꝓducit c:ergo ꝑ sextam petitiōem c diuiso per b redibit a.sed ⁊ eodē c diuiso per b p̄us veniebat d.numerat igitur a semel d.et sic ꝓpositio atqꝫ iusi correlarium nota sunt. ¶ Et quis hec vt mōstret ꝑfacilis sit:visus tn̄ eius aliquāto latētior:quem exēplaris deductio facile cuiqꝫ reddet illustriorem.vt quesita sit ꝟbi causa sūme decem et septē pars sextadecima duco vtriusqꝫ denoīantes in seinuicem.hoc est 17 et 16 et surgēt 272 sextedecime. tot enī sextasdecimas ꝯtinet numerus 17 resolutus. diuido ergo 272 per 16 ⁊ ꝓueniēt 17 sextedecime.q̄ erūt totius summe partium 272 pars sextadecima.quare ⁊ numeri 17 pars itidē sextadecima. at 17 sextedecime vnitatem cōtinent ⁊ vnā sextādecimā.est itaqꝫ vnitas ⁊ vna sextadecima:dati numeri 17 pars sextadecima . Et si numeri decem ⁊ octo queret pars septimadecima duco decem et octo in decem

& septem et productum diuido per 17 et veniet 18 septimedecime: que vnum cōplent integrum/ vnam septimādecimam. Est ergo vnitas & vna vnitatis septimadecima data summe decem & octo pars vna septimadecima. Si vero summe decem & septem volo partem octauā reperire: duco 17 in octo & quod productum fuerit diuido per octo & prouenient 17 octaue que duas vnitates & vnam octauam efficiunt. erunt igitur duo & octaua vnius totius summe decem & septem pars octaua. quod querebatur. Et ita in quibuslibet se quiuis valeat exercitare: habent tamen que particulari/ exemplariqꝫ demonstratione sunt ostensa: ad sequentia pondus ac momentum.

Si duo inequales numeri ad eundem minorem comparentur: maioris ad ipsum maior est proportio/ et minoris minor. 11

9	8	7
a	b	c

Ut sint a b duo inequales numeri quorum a sit maior/ et b minor: qui comparentur ad eundem minorem c. dico a ad c maiorem esse proportionem quam b ad c. Nam cum per octauam petitionem extremorum a ad c proportio composita sit ex proportionibus a ad b & b ad c vt suis partibus: ergo proportio b ad c pars est proportionis a ad c et proportio a ad c totum. et cum per vltimum commune proloquium Omne totum maius sit sua parte: igitur proportio a ad c maior est proportione b ad c. et ita de quibuslibet aliis simili argumento est agendum.

Sesquisextadecima proportio: integrum toni dimidium superat. 12

a	c	d	e	f	g	h	i	k	b
l	m	n	o	p	q	r	s	t	

Multa huius monstrauit medio extremorum toni spacio in duo equa diuiso: tonum minime in duo equa geometrice partiri: et sectionem hinc & inde alterniecus sesquiseptimādecimā/ et sesquisextādecimā retinere proportionē. Hec vero ostendit sesquisextādecimā proportionem que illic ex parte intensionis acuminisqꝫ relinquitur: hemitonio/ integroqꝫ toni dimidio esse maiorem. et sequens monstrabit sesquiseptimādecimam ex grauiori parte sumptam: eodem toni dimidio esse minorem. Sit ergo vt in quinta huius spacium a b in decem & octo equas partes per a c d e f & reliquas notas diuisum. ita vt a b earum partium contineat decem & octo/ & c b sedecim/ & l b decem & septem. manifestum est a b & c b vt prius visum est esse tonum: et l b 17 ad c b 16 esse sesquisextādecimā quam habitudinem dico esse integro semitonio maiorē. quoniam cum per decimam huius vnitas & sextadecima vnius: est summe decem & septem pars sextadecima. que si eidem summe adiiciatur fient decē & octo, et sextadecima vnius. at octodecim & sextadecima vnius ad decē & septem per diffinitionē est sesquisextadecima. Sunt igitur decē & octo & sextadecima vnius ad decē & septem et decem & septem ad sedecim due coniuncte sesquisextedecime. sed decem & octo & sextadecima vnius: per precedentem maior est sesquioctaua ad sedecim. Nam decem & octo ad sedecim vt prius visum est: sesquioctaua est. igitur sesquisextadecima bis aucta tonum/ toniqꝫ interuallum transcendit. quare per nonum proloquium sesquisextadecima proportio integrum toni dimidium superat. quidquid enim bis auctum transcendit aliquid: id vltra eius dimidium esse necesse est. Ex quo valentiore iure cognoscitur sesquiquintamdecimam & omnem proportionem sesquisextadecima maiorem: integrum toni dimidium superare.

Sesquiseptimadecima: minor est integro toni dimidio. 13

19	1	19	1	18	17		A ad b sesquidecimāseptimam proportionem
d	8	c	17	a	b		continet: que integro toni dimidio contractior est.

Sint a decem & octo interualli partes & b decem & septem/ c decem & nouem & vna septimadecima/ d vero decem & nouem & vna octaua. per decimā huius a ad b est sesquiseptimadecima. et c ad a similiter sesquiseptimadecima. sunt ergo c ad b due sesquiseptimedecime adinuicem coniuncte. sed et per eandem d ad b sesquioctaua est atqꝫ tonus. d enim cōtinet b & eius partem octauam. at d ad b proportio maior est proportione c ad b. nam vnius pars octaua maior est vna septimadecima. ergo sesquiseptimadecima proportio per decimum proloquium minor est integro semitonio. quod enim duplatum non implet integrum: neqꝫ id quoqꝫ continet dimidium. Est ergo notum sesquiseptimādecimam proportionem integro toni dimidio esse minorem.

Integram toni medietatem: inter sesquisextamdecimam & sesquiseptimādecimam proportionem cadere necesse est. 14

Nam per duodecimam sesquisextadecima maior est toni dimidio: & per decimātertiā minor est eodē toni dimidio. at per eandem scientiam inter maius atqꝫ minus dimidio: proportionem dimidium consistere necesse est. ergo integrum toni dimidium inter sesquisextādecimam et sesquisept. mādecimam cadere necesse est. Sed id in noto/ integroqꝫ numero nullo pacto vt septima huius monstrauit fieri continget: vt neqꝫ in geometricis diameter quadrati: eius coste certo/ constitutoqꝫ numero commensurari potest. Sed hoc vltimum ex altero loco requirendum est.

Semitonium minus: duobus tonis in chorda subiugere. 15

A	c	d	e			b

¶ Intelligit semitonium subiūgi qñ ex acutiori parte duob⁹ quidē tonis ad grauiorem ptē relictis ipm semitonium collocat. preiūgi do qñ ipm ex parte remissiori duob⁹ tonis adhibet. Cōtinuo ergo per scdam huius duos tonos in chorda a b per notas a c d b. sitq3 a b c b: primus. et scds sit c b d b qui quia per diffinitiōem in sesquioctaua ꝓportiōe cōsistūt: et per decimāseptimā primi hui⁹ due sesquioctaue minores sunt sesquitertia ꝓportiōe. erit ergo a b et d b minus sesquitertio. diuido ergo a b in quattuor partes equas: et initiū tertie sectiōis, facio notam e. ita vt e b tres eap quartap cōtineat: per diffinitiōem igitur a b ad e b sesquitertia ꝓportio est. sed sesquitertia ꝓportio a b ꝛ e b superat duos tonos a b et d b in proportiōe d b et e b. est igit d b et e b per descriptionem semitoniū minus duobus tonis: vt propositum erat subiunctum.

16 ¶ Semitonium minus: duobus tonis preponere.

A	e	d	c							b

¶ Facio a b ad c b sesquitertiū interuallū et diuido c b in octo equas partes et supra c versus a: facio d c vni eap octo partium equā: ita vt d b eap partiū nouem cōtineat. et per diffinitiōem d b ꝛ c b vnum cōstituūt tonum. Similit diuido d b in octo equas partes: et vnā eap adiūgo supra d p notam e. quare iterp e b ꝛ d b erit tonus. suntq3 duo toni e b et c b. sed a b et c b sesquitertia ꝓportio: maior est duobus illis tonis in ꝓportione a b ꝛ e b. est igitur per diffinitionem a b ꝛ e b semitonium minus. qd cum sit duobus tonis prepositum: qm ex parte remissa illis adiūctum. factum est propositum.

17 ¶ Duobus tonis: diesim/ semitoniūq3 minus interponere.

A	d	e	c	b

¶ Idem diesim atq3 semitoniū minus hic (vt iam quoq3 dictum est) intelligimus. Sit ergo a b ꝛ e b vt in precedenti sesquitertia ꝓportio in tota chorda a b. ab a: versus: intēdo tonum per notam d. et ab c versus a remitto tonū vt in precedēti factū est per notam e: ita vt a b et d b sit tonus/ et similit e b et c b tonus. manifestum a b et c b sesquitertiā ꝓportiōem superare duos illos tonos in media ꝓportiōe d b et e b. est igitur per diffinitionem d b et e b semitoniū minus duobus tonis interceptū et ꝓpositū.

18 ¶ Semitonij minoris mimos numeros reperire: et quomodolibet semitoniū minus in chorda vna aut pluribus collocare.

324	288	256	243
f	g	h	k
81	72	64	
e	d	e	
9	8		
a	b		
4	3		
l	m		

¶ Sit a nouenarius ꝛ b octonarius minimi numeri toni. duco a in se/ et a in b/ et b in se et cōsurgant numeri c d e. inter quos per sextam quarti Arithmetices erūt duo sesquioctaui/ duoq3 toni in minimis numeri c d e. inter quos per sextam quarti Arithmetices erūt duo sesquioctaui/ duoq3 toni in minimis cōtinuati. Sit preterea l quaternarius et m ternarius. duco l in c d e ꝛ prodeāt f g h: inter quos p septimā sectiōi Arithmetices similit cōiūcti sunt duo sesquioctaui/ ꝛ ꝓinde duo toni. duco preterea itidē m in c sectiōi Arithmetices f ad k est ꝓportio sesquitertia q̄ p 17 primi hui⁹ maior est et ꝓueniat k p octauā sectiōi Arithmetices f ad k est ꝓportio sesquitertia q̄ p 17 primi hui⁹ maior est f h et differētia ē h k. dico ergo h k esse mimos nūeros semitonij minoris. q enī sint numeri semitonij minoris per diffinitiōem notū est. sed q mīmi: id iam declarandū est. Nam qz c e sunt in sua ꝓportiōe mīmi: per decimāoctauā tertij Arithmetices sūt cōtra se pmi. et qz etiā l ꝛ a quaternarius ꝛ nouenarius sunt cōtra se primi l. ergo per vndecimam tertij Arithmetices l est pmus ad c. et per decimā eiusdem h qui nascit ex l ꝛ e pmis eidē numero c: erit primus ad c. Rursus m ꝛ b ternarius atq3 octonarius sunt adinuicem pmi. ergo p vndecimā tertij ꝛ m primus est ad e sed ꝛ cū l, m quaternarius ꝛ ternarius sint etiā primi: ergo per decimam eiusdem m etiā primus est ad h. Cū ergo c ꝛ m mōstrati sunt primi ad h ergo per eādem decimā tertij numerus k ex c ꝛ m ꝓductus: primus est ad h. sunt itaq3 h ꝛ k semitonij minoris numeri adinuicem primi: quare per vicesimam tertij Arithmetices in sua ꝓportione mīmi. qd est ꝓpositū quo ad hoc. Et data quacunq3 chorda si eā diuides scdm numerū h ꝛ eap partiū accipias scdm numerum k numeros scz semitonij minoris vbilibet in eadem chorda cōstitutū erit semitonij minoris interuallum. In diuersis aūt facillime idem feceris: si eas chordas equales eqūliter tensas vnisonasq3 posueris/ et partiaris eap quācūq3 voles scdm h quap partium alterius acceperis scdm k erit tum in pluribus chordis semitonij minoris constitutum interuallum. quod est totum propositum.

19 ¶ Semitonium minus in minore q̄ sesquiseptimadecima sit: proportione consistit. Quo fit vt regula semitonij sumendi: non sit differētiam extremorū toni in duo equa partiendo.

314	188	257	5	256	143	
y	g	l	17	h	k	

¶ Sint vt in precedenti h k minimi numeri semitonij minoris vt ducenta quinquaginta sex et ducenta quadraginta tria. capio per decimam huius: septimamdecimam partem numeri k ducentorum sex quadraginta trium/ eritque quattuordecim et quinque septimedecime. addo itaque quattuordecim et 5 septimasdecimas ad k et fiat l numerus 257 et 5 septimedecime. erit ergo numerus l ad k sesquiseptimusdecimus. at l ducenta quinquaginta septem et quinque septiedecime transcendit h qui solum est ducentorum quinquaginta sex. consistet itaque semitonium minus per vndecimam huius in minore proportione quam sit proportio sesquiseptimadecima. quare et a fortiore in minore consistit proportione quam sit sesquisextadecima. Correlarium hinc notum est. Nam hoc pacto particendo extremorum toni spacium: ex quibus huius cognoscitur sesquisextadecima atque sesquiseptimadecima altrinsecus constitui: quamquam vtraque presens monstrauit semitonij minoris habitudinem esse minorem.

¶ Sesquioctauadecima proportio: semitonio minore rursus maior euadit. 20

256	1	256	243
c	2	a	b

¶ Sint a b minimi numeri semitonij minoris per decimamoctauam huius reperti scilicet ducenta quinquaginta sex/ et ducenta quadraginta tria. capio per decimam huius octauam decimam partem numeri b: quam reperio esse tridecim et semis: quam quidem addo numero b/ fiatque aggregatus c. tunc c ad b sesquioctauadecima proportio est. at c maior numerus est a. nam a duntaxat continet ducenta quinquaginta sex: c vero equalium partium totidem et insuper semissem vnius. est igitur sesquioctauadecima proportio semitonio minore maior.

¶ Sesquinonadecima: est semitonio minore minor. Quo fit vt semitonium minus inter sesquioctauamdecimam/ et sesquinonamdecimam consistat collocatum. 21

256	255	15	243
a	c	19	b

¶ Sint vt prius minimi termini semitonij minoris a et b: dico sesquinonamdecimam proportionem minorem esse proportione a ad b. capio enim per decimam huius: nonamdecimam partem numeri b: quam inuenio esse duodecim et quindecim nonasdecimas. quam partem adijcio numero b et fiat c. proportio c ad b est sesquinonadecima. sed a maius est quam c. igitur per vndecimam huius maius est semitonium minus sesquinonadecima proportione/ atque sesquinonadecima proportio semitonio minore minor. Correlarium vero vt decimaquarta huius notum esse potest.

¶ Semitonium maius: in data chorda constituere. 22

D a	c							b

¶ Sit a b et c b semitonij minoris interuallum. diuido c b in octo partes equas: quibus equam facio partem c d. ita vt d b nouem contineat. ergo d b et c b erit tonus. demo igitur a tono d b et c b semitonium minus scilicet a b et c b/ relinqueturque d b et a b toni reliqua pars et qua ipse semitonium minus superat. igitur per diffinitionem d b et a b semitonium maius est in data chorda (vt propositum erat) constitutum. et quemadmodum semitonium maius collocasti ad partem grauiorem ita quoque ad partem acuminis collocare facillimum esset.

¶ Semitonij maioris: minimos numeros reperire. 23

2187	2048		1944
e	d		c
	256		243
	a		b
		8	
		f	

¶ Sint a b minimi numeri semitonij minoris ex decimaoctaua huius reperti et f octonarius. qui ex demonstratione decimeoctaue huius f octonarius primus est ad b. ergo f non numerat b. non habet igitur b octauam partem. duco igitur f in b et a et consurgant c d: per septimam secundi elementorum Arithmetices d ad c vt a ad b. est igitur inter d c semitonium minus/ semitonijque minoris interuallum. et quia c habet partem octauam vt b: addo eidem numero c partem octauam eius b: et coaceruatus fiat e. continet igitur e numerum c/ et partem eius octauam. quare e c tonus. et quia tonus e c superat semitonium minus d c

2187
2048

interuallo e d: ergo e d sunt nūeri semitonij maioris. Q; autē idē sint minimi facile ex decimaquīta 139
tertij arithmetices cognoscas distrahēdo d ab e et quod reliquū fuerit iterū quoties potes distrahēdo 102
ab d. et hoc pacto deinceps et videbis ad vltimum relictam vnitatē eritqꝫ modo qui ad latus apparet 37
distractio. quare per eandem decimāquintam d et e sunt adinuicem primi. sunt igitur per vicesimam 28
eiusdem in sua proportione minimi: quod est propositum. 9

1

24 ¶ Semitonij maioris habitudo: sesquiquintādecimam superat proportionē.

2187	2184 8	2048	136 8
a	c 15	b	d 15

¶ Sint a b minimi termini habitudinis semitonij maioris per precedētem reperti: dico habitudinē a ad b maiorē esse sesquiquītadecima. sumo enī vt in precedētibus iam sepe factū est per decimā huius quintādecimam partē numeri b et hec inuenitur centū trigintasex et octo quintedecime vnius q̄ sit d adiicio ergo d ad b et fiat c: certū est c ad b esse sesquiquītamdecimā. at c minor numerus est q̄ a. est enī a numerus duum miliū centū octuagintaseptē. c autem solum duū millium centū octuagintaquattuor et fere semis paulo amplius. Est igitur per vndecimā huius semitonij maioris habitudo sesquiquīta decima proportione maior eamqꝫ superans: quod est propositum.

25 ¶ Apotomes interuallum: minus est sesquiquartodecimo interuallo. Unde manifestum est semitonij maioris proportionem inter sesquiquintādecimam et sesquiquartā decimam reperiri collocatam.

2194 4	2187	2048	146 4
c 14	a	b	d 14

¶ Apotomē et semitoniū maius: idem esse iam diximus. Sint ergo a b minimi nūeri semitonij maioris vt duo milia centū et octuagintaseptē et duo milia quadragintaocto. sumo per decimā huius quartā decimā partem b scꝫ duum miliū et quadragintaocto quā inuenio esse centū quadragintasex et quattuor quartedecime que sit d. addo eam quartādecimam ad b: et fiat numerus aggregatus c. tunc numeri c ad b sesquiquartadecima proportio est. at c maior numerus est a si quidē duo milia quadraginta octo et centū quadragintasex et quattuor quartedecime summā simul attollant c: duum miliū centū nonagintaquattuor et fere quartāvnius. et a solum summa sit duum miliū centum octuagintaseptē. constat ergo sesquiquartādecimam proportionē maiorem esse semitonio maiore: atqꝫ propositum. Correlarium vt precedentium notum est.

26 ¶ Semitonium minus atqꝫ semitonium maius in superparticulari proportione non cadunt: sed ea in superpartiente ratione consistere necesse est.

¶ Nam semitoniū minus per correlariū vicesimeprime huius cadit inter sesquioctauā decimam et sesquinonādecimam. atqui inter sesquioctauādecimam et sesquinonādecimā nulla cadere valet intercepta mediaqꝫ superparticularis habitudo. sunt enī ille superparticulares proxime maior atqꝫ minor igitur semitoniū minus in superparticulari ratione non consistit. neqꝫ per idem semitonium maius. Nam per correlariū precedētis cadit in aliqua proportione media inter sesquiquintādecimā et sesquiquartādecimam duas proximas superparticulares: que superparticularē mediam nullā admittunt nō igitur semitoniū maius cadit in superparticulari ratione. sed et cum rationes semitonij minoris atqꝫ maioris multis superparticolaribus vt iam visum est sint minores: erūt etiam minores ratione duplari que multiplicium minima est: vt que a minimo numero denominetur. nullus enim numerus binario minor. nō est ergo semitonij minoris habitudo multiplex: similiter neqꝫ semitonij maioris. relinquitur igitur a sufficienti diuisione cum ille sint inter maiorē terminum et minorē: eas esse in superpartienti genere. quod est propositū. ¶ Id tamē propter sophistas aduertere licet q̄ tonus et sue partes cōsonantie et consonātiarum partes intense: semper in superparticulari/ superpartiēti aut multiplici habitudine cadunt: remisse vero in subsuperparticulari/ subsuperpartiēti aut submultiplici. Atvero et si ita sit: solemus tamen eas omnes dicere esse in superparticulari habitudine superpartienti/ aut multiplici idem superparticulare et subsuperparticulare reputātes et pro vno computantes. similiter superpartiens et subsuperpartiens/ et multiplex et submultiplex.

27 ¶ Musicum comma in chorda reperire.

a	f	g	c	b
256		243		
d		e		

¶ Sit a b chorda supra quam sit propositū reperire musicū comma: in qua a b et c b sit sesquioctaua proportio atqꝫ tonus. sint preterea d e minimi termini semitonij minoris. diuido spaciū a b in partes equales secundū d: et ex quarum numero ab ipso b versus a: capio secundū numerū e: et in termino earū pono notam f. tunc que proportio d ad e: ea erit a b ad f b. quare a b ad f b semitoniū minus. Rursus c b spacium seco in equas partes secundū numerum e et earum partium ab ipso b versus a metiendo assumo secundū numerum d: et in earum termino pono notam g. manifestū etiam est g b et c b esse semi

tonium minus. sed et cum a b et f b probatum sit etiam semitoniū minus. ergo interuallum f b et g b est quo sesquioctaua proportio a b et c b maior est duobus semitoniis minoribus. est igitur per diffinitionem f b et g b inuentum musicum comma: quod erat monstrandum.

Comma: in minimis numeris constituere. 28

531441	524288		497664	472392
k	g		h	i
	65536		62208	59049
	c		d	e
	256		243	
	a		b	
		8		
		f		

Sint a b minimi numeri semitonij minoris. duco a in se et in b et b in se et exurgant c d e: eruntque c d et d e duo semitonia minora coniuncta. sit preterea f octonarius qui et decimaoctaua huius est primus
531441 ad b. quare per vndecimā tertij arithmetices et primus ad e. non habet igitur e octauam. duco ergo f
524288 octonariū in c d e et proueniant g h i: vt i scz oriatur ex f in e. certū est etiam inter g h et h i esse duo se-
7153 mitonia minora. et quia e est octaua pars i addo e et i simul: sitque eorum aggregatus k. dubiū nullum est
2119 k ad i esse sesquioctauū: et k g esse proportionem qua sesquioctaua maior est g h et h i duobus semi-
796 tonijs minoribus. sunt igitur k g numeri cōmatis. sed quod sint minimi ex decimaquinta tertij arithme-
527 tices notum est. Nam substracto vt ea ipsa docet g ab k: et eo quod relictū est substracto quoad potest
269 ab g. et sic deinceps tandē vt ad latus adiectū apparet: relinquitur vnitas. Et quemadmodum comma
258 duabus diesibus est prepositum: ita quoque facillimū est comma duabus diesibus subiungere: aut
11 duabus interserere.
5
1

Sesquiseptuagesimaquarta: commatis proportione transcenditur. 29

531441	531372 72	524288	7084 72
a	d 74	b	c 74

Sint enī a b minimi numeri cōmatis per precedentē reperti. elicio per decimā huius septuagesimā quartā b que sit c. addicio itaque b et c simul: et coalescat aggregatorque numerus d. qui si ad b conferatur cōperitur sesquiseptuagesimusquartus. atqui idē d minor a esse deprehēditur. superat ergo per vndecimam huius ratio cōmatis septuagesimāquartam proportionem

Cōmatis ratio: sesquiseptuagesimatertia proportione minor est. vnde fit vt cōmatis ratio inter septuagesimāquartā et septuagesimātertiā constituta reperiatur habitudinē 30

531470 2	531441	524288	7182 2
d 73	a	b	c 73

Sint a b vt prius minimi numeri cōmatis. capio septuagesimātertiam partē b que sit c. iungo b et c simul et aggregetur d. eritque d ad b sesquiseptuagesimustertius. et d maior a esse conspicitur. ergo cōmatis ratio sesquiseptuagesimatertia proportione minor est: quod erat monstrandum.
Correlarium vt alia notum est.

Commatis ratio: in superpartiente ratione consistit. 31

Non enī in superparticulari cōsistet quandoquidē due superparticulares proxime sesquiseptuagesimaquarta et sesquiseptuagesimatertia: omnē prorsus mediā excludant superparticularē, et tanto minus in genere multiplici cōsistere valebit. vt que septuaginta duas superparticulares habeat se maiores. relinquitur ergo vt ea in superpartiēte genere consistere possit. est enī ea maioris et minoris habitudo.

Rationes schismatis atque diaschismatis sunt ignote/atque irrōnales. quo fit vt quarumlibet minimi nūeri tetragonicū latus nō habeāt: medietatū rōnes ignote irrōnalesque sint oēs 32

256	243			
a	b	c	d	e
531441	524288			

Eas rationes ignotas atque irrationales dicimus que nullo certo cōstitutoque numero designari valent vnquā: vt neque in geometricis diametri et coste quadrati proportio: quales schismatū diaschismatūque

proportiones esse dicimus. Sint ergo primo a b minimi numeri semitonii minoris: per decimamoctavam huius inventi: b enim ut illic quoque monstratum est nascitur ex novenario in se et ternario in productum novenarii in se at numerus qui ex ductu novenarii in se exurgebat: erat quadratus et ternarius non est quadratus: ergo per decimamquartam sexti arithmetices b minus semitonii minoris extremum ex ductu quadrati non quadrati in quadratum provenies: non est numerus quadratus. si possibile est ergo ut diaschismatos proportio in numeris sit nota: sint ergo per sextam quarti arithmetices duo diaschismata in minimis c d e coniuncta. manifestum enim est cum diaschisma sit semitonii minoris dimidium c d et d e simul esse semitonium minus. et c ad e esse semitonii minoris intervallum. sed et cum proportiones c d et d e sint continuate in minimis ergo per quintam quarti arithmetices c e sunt in sua proportione minimi. sunt ergo minimi in proportione semitonii minoris. sed et tales positi sunt a et b: igitur c et e iidem erunt numeri cum a et b scilicet c idem a et e idem b. Preterea quia que proportio c ad d ea est d ad e: ergo per primam sexti arithmetices e numerus est quadratus et e numerus quadratus: quare et b idem numero e etiam quadratus. at b demonstratus est non quadratus. erit itaque idem numerus quadratus et non quadratus: quod est impossibile. non igitur diaschisma note proportionis habebitur. et idem de proportione schismatos monstrabitur. sint enim a b subter designati minimi numeri commatis: quia per vicesimamoctavam huius b minor proportionis commatis terminus fit ex ductu octonarii in quadratum lateris ducentorum quinquagintasex. et octonarius non est quadratus: ergo per decimamquartam sexti arithmetices b minor terminus commatis non est quadratus. non igitur simili ut prioris partis demonstratione a b certis designatisque numeris potest equis proportionibus diduci. est igitur schismatos eius scilicet medietatis ratio ignota atque irrationalis. Correlarium ex modo demonstrationis notum est.

Tonus: duobus semitoniis minoribus/et commate constat.

Nam ratio sesquioctava duobus semitoniis minoribus atque uno commate constat. superat enim duas dieses duoque semitonia minora uno commate: ac tonus in eadem ratione consistit. constat igitur tonus ex duobus semitoniis minoribus et commate.

Tonus a duobus semitoniis minoribus: uno commate distat.

Nam substracto a sesquioctava proportione uno commate relinquitur duo semitonia minora: igitur et eodem commate a tono diducto due dieses et duo semitonia minora relinquuntur. distat ergo tonus a duobus semitoniis minoribus uno commate.

Semitonium minus tribus commatibus maius est: minus vero quattuor. unde manifestum est apotomen plura quattuor et pauciora quinque continere commata.

r	2775319952232583016215507479941112
q	3281288894436935112572857762317 61
p	2636000619524018023605123896975 36
o	21783961796329506267463 68
n	2155369396307555577663107 47
m	206789543098796485173190 4
l	17098604835172352
k	1667718169966656 9
h	1623126552713625 6
g	13421772 8
f	12914016 3
e	12740198 4
d	52428 8
c	53144 1
b	243
A	256

Non est greca curiositas calculi labore deterrita quo minus quot commata in diesi quot in apotome quot denique in tono sint: pervestigaret. quod nisi a prioribus tentatum cognovissem cum id quoque plus laboris quam (ut michi visum est) in musicis modulationibus usus utilitatisque afferat: missum fecissem. qui tamen id cognoscere desideraverint hoc pacto deprehendent. Sint a b minimi numeri semitonii minoris et c d minimi commatis: per decimamseptimam et decimamoctavam huius reperti: duco b in c et d et proveniant e f et a in c et veniat g: per septimam secundi arithmetices f ad e est commatis habitudo: et per octavam eiusdem g ad e habitudo dieseos semitoniique minoris. Deinde duco e in e et f in f et e in g et nascantur h k l: per sextam quarti arithmetices perque facile cognosci potest: l h continere duo commata. et per

septimam secundi eiusdē l ad h esse semitonium minus. Deinde duco d in h et c in l: et d in l: et eo ordine veniant m n o: per eandem sextam quarti cognitu facillimū est n m continere tria commata. et per septimam secundi o m cōtinere semitonium minus. at n numerus cognoscitur esse minor o. ergo o ad m semitonium minus tria vincit/ exsuperatq; commata. Deinde duco h in h et l in l et h in l. et suo ordine exsurgāt/ oriantur q; p q r. manifestū est per idē qd prius q p cōtinere quattuor cōmata et r p cōtinere semitoniū minus. at numerus r minor est numero q. igitur quattuor cōmata amplius sunt semitonio minore. Correlariū autem hinc notū est q semitoniū maius solo cōmate superat semitonium minus. atqui semitoniū minus plura tribus et pauciora quattuor vt modo visum est continet cōmata. igitur vnico superaddecto cōmate semitoniū maius quod vocant apotomē: plura quattuor et pauciora quinq; continere est necesse.

Tonum: plura septem continere commata necesse est. 36

Nam tonus ex semitonio minore et apotome coalescit atq; cōstituitur. at semitoniū minus per penultimā tria continet cōmata et amplius: et per precedentē apotome quattuor et amplius tria autem et quattuor et amplius: septē sunt et āplius. igitur tonus plura q septem cōtinet commata.

Secundi Elementorum Musicalium finis.

Esquitonus: est qui tonum ac semitonium minus continet. quem et trihemitoniū trisemitoniūq;: inferius dicemus.
Ditonus est qui duos cōplectitur tonos.
Tritonus vero qui tres.
Consonantie simplices sunt: diatessaron/ diapente et diapason.
Composite vero: diapason diapente/ bis diapason.
Diatessaron est cōsonantia: que ex intervalli sesquitertia ratione nascitur.
Diapente: que nascitur ex sesqualtera.
Diapason vero: que ex dupla.
Diapason diapente: est quā adinvicē iuncte constituūt diapason ac diapēte cōsonātie
Bis diapason: est quam coniūgunt due diapason consonantie.

Nec altius ascēdunt Pythagorici q altius ascendētibus voces quoq; pacto ille stridule vise sint et q vnicuiq; ferme sue vocis modū/ limitesq; ad consonātiam bis diapason natura fecerit q; habita contēplatione musica adulq; cōsonantiam bis diapason: reliquāt habeatur q facillimā putauerunt vt qui ad ter atq; quater diapason musicos modulos aptare voluerint. et hac quoq; de causa musici ferme oēs in definiēda/ determinādaq; atq; tradēda disciplina musica limites Pythagore nō transcendūt: putātes eius limitibus cōtenti: et priscam/ veterēq; autoritatē secuti sufficiēter determinasse. quod et nos in hoc opere tētabimus imitari.

Sesquitonus inter sesquiquintam atq; sesquisextam collocatus est. Vnde fit vt etsi sesquitonus iocunde/ suauiterq; auditū feriat: nondū tamen consonātia ponēdus sit.

291 3	288	285 3	256	243	48 3	40 3
d 5	A	e 6	b	c	f 5	g 6

Sit ergo a ducenta octuagintaocto: b vero ducenta quiquagintasex: et c ducenta quadragintatria. per decimāoctauam secūdi huius manifestū est a ad b esse tonū/ et b ad c esse semitoniū minus. quare a ad c per diffinitionē erit sesquitonus. quē dico in proportione minore consistere q sit sesquiquinta/ et maiore sesquisexta. Nam capio per decimam secundi huius quintā partem c et veniet numerus 48 et tres quinte qui sit f. addo igitur f ad c et aggregatus fiat d: qui maior inuenitur q a. igitur per vndecimam secūdi huius d ad c proportio maior est q a ad c. At vero d ad c sesquiquinta est. est itaq; sesquitonus in proportione minore cōstitutus q sit sesquiquīta proportio. Capio deniq; per eandē decimam secundi sextā partem c et veniet michi numerus 40 et semis qui sit g. aggregatus igitur g ad numerum c restituat numerū e. certum est numerū e minorē esse q a. quare vt prius a ad c sesquitonus maior est q e ad c qui in sexquisexta proportione cōstituitur. quod est propositū. Correlariū etiam cognoscitur. et primū q sesquitonus suauiter feriat auditum: cuiuslibet musicis modulationibus intēti fidem facit sensus. q vero nōdum cōsonantia sit: iccirco euenit q sesquitonus in superparticulari ratione nō consistit: quādoquidem inter sesquiquintā et sesquisextā proximas supparticulares nulla cadit interiectes mediaq; superparticularis habitudo. neq; quidē est in multiplici genere: quoniā per vndecimā primi huius dupla proportio que multiplicium minima est: ex sesqualtera et sesquitertia proportione maximis quidē superparticularibus: exurgit atq; nascitur. cōsonantia autem omnis per diffinitionē in superparticulari aut multiplici ratione consistit. est ergo totum propositum notum.

2 ¶ Jtidem ditonus inter sesquitertiam atq; sesquiquartam medius: minime musicam complet atq; perficit harmoniam.

85 1	81	80	72	64	21 1	16
D 3	A	E	B	C	F 3	G

¶ Harmoniã et consonãtiam idem dicimus et huius vt precedẽtis procedit demonstratio. Sint ergo a b c duo toni in minimis constituti. vt 81 72 64. dico ditonum a ad c consistere in proportione minore sesquitertia: et maiore sesquiquarta ꝛ musicam cõsonantiam haud quaq̃ perficere. Capio enĩ tertiam partem c per decimã secundi huius vt sepe factum est. et venit vnum ꝛ viginti cum triente vnius: qui numerus sit f. addo itaq; f 21 et trientẽ ad numerũ c 64. et aggregatus est 85 cum tertia parte vnius: qui idem sit d. manifestũ est d ad c esse sesquitertiũ. at d maior est a: continet enĩ a duntaxat vnum et octuaginta: d vero octuaginta quinq; ꝛ amplius. est ergo sesquitertia proportio ditono maior. Et rursum capio quartam partem c que sit g: quam addo ad c et surgat e: qui erit ad c sesquiquartus. at a maior est e. igitur per vndecimã secundi huius: ditonus sesquiquartũ transcendit. et cum inter sesquitertium ꝛ sesquiquartũ nullus cadat superparticularis medius neq; multiplex: erit ergo ditonus in proportione superpartiẽti collocatus. quare musicam consonãtiam (etsi in musicis modulationibus sit euphonus suauiterq; auditum feriens) nõdum tamen perficit.

3 ¶ Ditoni interuallum: sola sesquitonum superat apotome.

¶ Nam sesquitonus vnum tonum cõtinet integrum et secundi toni cõtinet semitoniũ minus. sed cũ tonus ex semitonio minore ꝛ apotome conster euadatq; coalitus. ergo sesquitono ad secũdi toni completionẽ sola deest apotome. at ditonus solos duos incolumes integrosq; possidet tonos. ergo ditoni interuallum sola apotome/ soloq; semitonio maiore: sesquitoni superat interuallũ. qđ est propositũ.

4 ¶ Diatessaron consonantiam in data chorda collocare.

4	3			
A	c	d	e	b

¶ Cum enim epitrita/ sesquitertiaq; proportio: cõsonantiam diatessaron creet: iccirco data quacũq; chorda vt a b eam in quattuor equas portiones diuido. vt a c c d d e ꝛ e b. et dico a b ad c b consonare diatessaron. Nam a b continet c b et insuper a c que tertie parti c b equatur. est ergo interuallum a b sesquitertiũ ad c b. ergo a b ad c b per diffinitionẽ consonat diatessaron: et cõsonantia diatessaron in chorda a b data: collocata. quod est propositum.

5 ¶ Tritonus: consonantiam diatessaron transcendit.

¶ Nam per decimãoctauam primi tres sesquioctaue proportiones ampliores sunt sesquitertio interuallo. atqui in tribus sesquioctauis: per diffinitionẽ tres consistunt toni. igitur in tribus sesquioctauis consistit tritonus. ꝛ in epitrito/ sesquitertioq; interuallo consistit cõsonantia diatessaron. igitur cõsonantiam diatessaron transcendit vt proponebatur: tritonus.

6 ¶ Consonantiã diatessaron: duobus tonis atq; semitonio minore constare necesse est. Unde facile comparatum est sesquitonum tono/ et ditonum semitonio minore citra diatessaron concẽtum deficere. Compertum item est consonãtiam diatessaron quinq; dieses et duo commata continere.

Diatessarum consonantia				
A	c			b

¶ Sit a b et c b consonantia diatessaron. dico eam duobus tonis ꝛ semitonio minore constare. Nam cum a b ꝛ c b sit diatessaron: erit a b et c b per cõuersionem diffinitionis sesquitertius. at cum semitonium minus per diffinitionẽ sit id quo sesquitertia duobus tonis maior est. continet ergo a b ꝛ c b semitonium minus et duos tonos. igitur consonantia diatessaron duobus tonis/ semitonioq; minore constat. Et primũ correlariũ hinc facile cognoscitur. Cum enim sesquitonus solũ tonum ꝛ semitoniũ minus contineat: deest igitur ipsi ad cõsonantiam diatessaron complẽdam per presentẽ vnus tonus. et cum ditonus solum duos cõplectatur tonos: deerit ipsi ad eandem complẽdam semitoniũ minus. Secũdum vero hinc haud difficile perspicitur cogniti. Nam cum tonus per tricesimãtertiam secũdi duas dieses ꝛ vnum comma cõtineat: duo toni quattuor dieses ꝛ duo cõtinebunt cõmata. at per presentem diatessaron consonantia duobus tonis vnam diesim superaddit. continet igitur consonantia diatessaron quinq; dieses atq; duo commata. quod est totum propositum.

¶ Quinque toni: duas diatessaron consonantias vno commate vincunt: euaduntque maiores. 7

¶ Putauit Aristoxenus musicus diatessaron cõsonantiam duobus tonis et integro semitonio constare. et proinde duas diatessaron cõsonantias: quinque tonos implere. cuius error ex tertio musices viri Seuerini boetij et ex hac et precedente facile cõuincitur. Nam per precedentem cõsonantia diatessaron nõ ex duobus tonis et semitonio integro constat: verũ ex duobus tonis et semitonio minore. quod ex vicesimaprima secũdi inter sesquioctauã decimam et sesquinonã decimã proportionẽ collocatur. integrum autẽ semitoniũ per decimãquartam eiusdem: inter sesquisextã decimã et sesquiseptimã decimã collocaretur. diminutius est ergo semitoniũ minus integro semitonio. Quia ergo vt per precedentem dictũ est: cõsonantia diatessaron duos tonos et semitoniũ minus cõtinet: due igitur diatessaron cõsonantie cõtinebunt tonos quattuor et duo semitonia minora. et quia per tricesimãtertiam secũdi tonus cõtinet duo semitonia minora et vnum cõma. ergo due diatessaron cõsonantie quinque tonos vno commate minus cõtinent. quinque igitur toni: duas diatessaron cõsonantias vno cõmate vincũt atque euadunt maiores. quod intẽdebatur.

¶ Consonantiã diapente: in assignato neruo constituere. 8

3	2		Consonãtia diapẽte.
A	c	d	b

¶ Sit assignatus numerus a b supra quẽ iussum sit cõsonantiã diapente collocari: diuido a b in tres adinuicẽ equas partes per notas a c d b: ita vt a b tres cõtineat et c b earum contineat duas. erit per diffinitionẽ a b ad c b hemioliũ/ sesqualterũque interuallũ. sed cum cõsonãtia diapẽte per diffinitionẽ ex ea interualli ratione nascatur. ergo a b ad c b cõsonabit diapẽte. eritque a b ad c b in data chorda assignatoue neruo cõsonantia diapẽte collocata.

¶ Tres toni: consonantia diapente minus sunt. et quattuor eandem consonantiam transcendunt. 9

¶ Etsi ex quinta huius satis cognoscatur tritoniũ nõ posse efficere diapẽte cõsonantiã: hec etiã ostẽdit tritonum diapẽte consonãtia esse minorem. Nam per decimãoctauam primi huius tres sesquioctaui minus sunt sesqualtero interuallo. et per decimãnonam eiusdẽ quattuor sesquioctaui sesqualterum superãt interuallũ. consonãtia autẽ diapẽte in sesqualtero sita est. ergo tres toni in tribus sesquoctauis constituti: minus sunt cõsonantia diapente. et quattuor toni in quattuor cõsistentes sesquioctauis eãdem consonãtiam magnitudine transcẽdunt: quod est totum propositum.

¶ Consonantia diapente: tribus tonis/ semitonioque minore constat. Quo fit vt a diapente subducto tono: diatessaron consonantia relinquatur. subducta autẽ diatessaron consonantia: relinquatur et tonus. 10

¶ Nam per decimãquintam primi si a sesqualtero internallo sesquitertiũ demptũ fuerit: relinquetur sesquioctauum. sed vt in demõstratione sexte huius visum est: sesquitertiũ continet duos tonos cum semitonio minore. ergo cõsonantia diapente sesquioctauũ hoc est tonum vltra duos tonos cum semitonio minore continens: tribus tonis et semitonio minore constabit quemadmodum propositum est. Correlariũ cognoscitur. Nam diapente per presentem continet tres tonos cum semitonio minore. at substracto tono residui sunt duo toni: atque semitoniũ minus. et per sextam huius duo toni cũ semitonio minore constituunt cõsonantiam diatessaron. substracto igitur tono a cõsonantia diapente: relinquitur diatessaron. sed et cum diapẽte constet ex tribus tonis cum semitonio minore: substracta ergo diatessaron cõsonantia que duobus tonis et semitonio minore completur: relinquetur quẽadmodum secunda pars correlarij proponit: tonus. quod est totum correlarium.

¶ Diapente consonantia: minus octo semitoniis minoribus continet. 11

¶ Nam cum tonus vnus duo semitonia minora et vnum cõma cõtineat: tres toni et vnum semitoniũ minus septem semitonia minora et tria commata cõtinebunt. ac tria commata per tricesimãquintam secundi huius semitonio minore sunt contractiora. ergo diapente que per precedẽtem tribus tonis et semitonio minore constat: minus octo semitoniis minoribus cõtinebit. sed quẽadmodum facile monstratum est diapente cõsonantiam nõdum octauum attingere semitoniũ minus/ octauũque diesum: ita quoque facile monstratu esset: eandem consonãtiam nõdum septimam attingere apotomẽ.

¶ Diapente consonantia: ditono/ sesquitonoque coniungitur. 12

¶ Nam diapente per penultimã tribus tonis et semitonio minore constat. et ditonus et sesquitonus simul tres tonos et semitoniũ minus efficiunt. igitur ditonus atque sesquitonus pariter copulati cõsonantiam diapente iungunt: quod intenditur.

¶ Consonantiarũ diapente et diatessaron: tonus differentia est. quo fit vt diatessaron consonantia adiuncto tono: consonantiam diapente restituat. 13

Differẽtia hic vocat ea ꝓportio qua maior superat minorẽ. Nam ꝑ correlariũ decime huius subducto tono a cõsonantia diapente relinquit consonãtia diatessaron. Solo igitur tono consonantia diapente cõsonantia diatessaron est maior. est igitur per diffinitionẽ harum cõsonantiarũ tonus differentia. et correlariũ statim ex propositione notum est.

14 Bis diatessaron: sesquitono consonantiam diapente transcendit.

Diatessaron enĩ ꝑ sextã huius duos tonos atq; semitoniũ minus cõtinet. ergo bis diatessarõ quattuor tonos et duo semitonia minora ɔtinebit. atqui a quattuor tonis et duobus semitoniis minoribus dempto sesquitono: relinquitur tres toni et semitoniũ minus. At vero per decimã huius cõsonantia diapente totidẽ tonos cũ semitonio minore cõplectitur. ergo bis diatessaron: sesquitono consonantiã diapente transgreditur transcẽditq; quẽadmodum proponitur.

15 Cõsonantie diatessaron ac diapente: in maximis supparticularibus sunt collocate

Nam et diffinitione cõsonantia diatessaron in epitrita sesquitertiaq; ꝓportione collocatur. et diapente in hemiolia atq; sesquitertia. at nulle supparticulares sesqualtera et sesquitertia sunt maiores nam a secũda et tertia parte q̃ maxime sunt sese cõsequẽtes partes: denominãtur. igitur he cõsonantie ex maximarum superparticulariũ originibus ducte: in maximis superparticularibus sunt collocat quod est propositum.

16 Bis diatessaron aut bis diapente: nullam consonantiam cõponere potest.

Hec proponit duas diatessaron cõsonantias aut duas diapente consonantias: nullã conflare posse cõsonantiã. Nam et diatessaron et diapẽte nõ in multiplicibus sed supparticularibus sunt constitute et per primã petitionẽ que interualli ad interuallũ proportio est: ea quoq; est et soni ad soniũ. at ꝑ sextã primi duo similia interualla nõ multiplicia: neq; multiplex neq; supparticulare creant interuallum. quare neq; illorũ soni in multiplici: neq; in supparticulari gñe existunt. omnis aũt consonãtia aut in supparticulari aut in multiplici rõne collocãda est. sic enĩ consonantie noĩe hoc in loco Pythagoricã sequẽtes autoritatẽ: suscepimus vtẽdum. ergo due cõsonantie diatessaron aut due diapente: nullam efficiẽt cõsonantiã. et nõ modo id verũ fit: sed et quotquot ɔsonantie diatessarõ in imensum copulẽtur et quotquot diapẽte: nullã vnq̃ consonãtiam ex quinta primi huius efficere valebũt.

17 Adiuncto ad cõsonantiam diapente tono: nulla parabitur consonantia. item neq; ad diatessaron trisemitonio.

G	11			Numerorum differentia		L	3384			Numerorũ K S differentia
E	27	F	16	Sexta maior		K	9216	S	5832	Sexta minor
C	9	D	8	Tonus		P	2304	Q	1944	Sesquitonus
A	3	B	2	Diapente		N	4	O	3	Diatessaron
						L	256	M	243	Semitoniũ minus
						H	9	K	8	Tonus

Et si hic sonorũ congressus nõdum cõsonantia sit: euphonũ tamen musici reputant melo modulaminibusq; aptum: sextãq; q sex impleatur vocib9 nostri nunc nũcupant. et quattuor tonis atq; vna diesi hoc est semitonio minore constat. qui q nõdum cõsonãtia sit patet. Accipio enĩ a et b ternariũ et binarium: minimos scz numeros cõsonantie diapente. et c d nouenariũ atq; octonariũ minimos numeros toni. et duco c in a et veniat d septem supra viginti. et d in b et veniat e decem et sex. per tertiam quinti Arithmetices d ad e cõtinet sesqualterũ et sesquioctauũ: quare d ad e cõtinet diapente atq; adiunctũ tonum. at manifestũ est d ad e 27 scilicet ad 16 nõ esse multiplex. nam septem et viginti nõ continẽt bis aut tertio aut deinceps sedecim. neq; d superparticularis est ad e. nam differentia numeri d ad e est vndecim qui numerus summe 16 pars nulla est. transcẽdit enĩ vndenarius sedenariũ dimidiũ. igitur adiũctus ad consonãtiam diapente tonus: nullam parit cõsonantiã. et simili argumento adiecto ad cõsonantiã diatessaron sesquitono: nulla fit cõsonantia vt ex secũda figuratione perfacile patere potest. fit tamẽ euphonia vocum congressio: quã item sextam nũcupant: sed que a prima contractior tota differt apotome. est ergo hec minor: illa vero maior. constat enim prima vt dictum iam est: quattuor tonis et vna diesi. secunda vero tribus tonis et duabus diesibus. Primã sonat Parhypate hypaton ad mesen: secũdam vero que contractior est: sonat hypate hypaton ad Lichanon meson. que autem hypate que parhypate: qui lichanus et que mese dicãtur: sequẽs liber declarabit.

18 Quo pacto diapason consonantia: in chorda sit adiungenda.

A	C	B	Cõsonantia diapason

Hec ɔsonãtiarum vt in libro problematũ testatus est Aristoteles: elegãtissima pulcherrimaq; est Chordam ergo a b seco per medium per notã c. et quia a b ad c b est dupla interualli habitudo. ergo per diffinitionem a b ad c b consonat diapason.

¶ Consonantia diapason: in sex tonis minime consistit. sed quinqȝ amplior: sex vero tonis: consonat contractior. 19

¶ Nam per vicesimā primi quinqȝ cōiuncti sesquioctavi: minus duplici intervallo conssigunt. et per vicesimāprimam eiusdē sex coniuncti maiore duplici intervallo eveunt. ergo quinqȝ toni minores sunt diapason cōsonantia: et sex eadem sunt ampliores. consonat ergo diapason quinqȝ tonis amplior: sed et sex eadem modulabitur inferior.

¶ Diapason: ex diatessaron et diapente consonantiis coniungitur. 20

¶ Nam per decimāquartam huius diatessaron et diapente in maximis supperticularibus sunt collocate. at per undecimā primi duplex intervallū ex duobus maximis supperticularibus cōiungitur. et duplex intervallū: consonātie diapason intervallū existit. igitur consonantiā diapason: diatessarō et diapente consonantie simul coniungunt. quod est propositum.

¶ Cōsonantia diapason: quinqȝ tonis et duobus semitoniis minoribus que tonū minime cōplent: perficitur. Unde quoqȝ manifestū esse potest: cōsonantiam diapason solo a sex tonis commate distare. 21

¶ Per precedētem eni diatessaron et diapente consonātiam diapason iungunt. diatessaron aūt per sextā huius duobus tonis et semitonio minore constare mōstrata est: et diapente p̄ nonā tribus tonis semitonioqȝ minore. at duo toni et semitoniū minus et tres toni et itidem semitoniū minus simul constati: quinqȝ efficitur toni atqȝ duo semitonia minora. at qui duo semitonia minora tonum sos perficiunt: verū ab eo deficiunt cōmate. igitur consonātia diapason quinqȝ tonis et duobus semitoniis minoribus: que tonū minime īplent quēadmodū iam propositū est perficit. ¶ Correlariū ex demonstrationis calce notū esse potest. Ex quo liquet p̄facile esse in nervo musicū cōma pervestigare Nam in eo s principio constitutis cōtinuatisqȝ sex tonis et ab eodē nervi initio ad mediū chorde notam intensa diapason cōsonantia quod inter mediā nervi notam et ultimū sex tonorū signum cōtinetur: ex precedentis correlario erit cōmatis interstitiū.

¶ Dempta ex diapason cōsonantia diapente: relinqtur diatessaron. et ex eadē dēpta cōsonantia diatessaron: relinquitur diapente. demptis autem ex ea diapente et tono relinquitur sesquitonius. 22

¶ Prima pars et secunda statim per penultimā cognite sunt. Item ꝛ per p̄cedentē. Nam per precedentē diapason quiqȝ tonis ꝛ duobus semitoniis minorib⁹ constat: a quibus si tres tonos et unū semitoniū minus tollas que per decimā huius diapente cōsonantiā continēt: relinquitur duo toni ꝛ semitoniū minus: q̄ per sextā huius diatessaron cōsonantiā efficiunt. dēpta igitur ex diapason consonātia diapente: relinquit diatessaron: quod est p̄mū. Secundū eadē facilitate declaratur. Nam ex quinqȝ tonis et duobus semitoniis minorib⁹ si duos tonos ꝛ semitoniū minus tollas: relinquitur tres toni et semitoniū mīus. Tertiū consimiliter. demptis eni a cosonātia diapente hoc est a quinqȝ tonis et duobus semitoniis minoribus demptis inquā quattuor tonis et semitonio mīore reliquus est tonus unus ꝛ semitoniū mīus. Et quot dieses quot apotomas quot deniqȝ cōmata contineat diapason: deprehēsions sunt facillime: in nulla tamen equaliter: tota ipsa divisus est quādoquidem diapason in multiplici ratione consistit que omnino in quotlibet equas proportiones que multiplices nō sint per sexagesimam noni arithmetices dividi non potest.

¶ Nulla simplex cōsonantia: in duo equalia: certo/cōstitutoqȝ nūero divisibilis est. 23

¶ Simplices consonātias vocamus diatessaron/diapente/diapason. de diatessaron autē ꝛ diapente constat q̄ ex supparticularibus intervallis surgūt: que per quintā p̄imi nullo spacto hunc in modum dirimi possunt. de diapason vero cōsonantia idē subit iudiciū. Nam quoniā minimi eius numeri sunt duo et unum: ꝛ duo quadratus nō est: igitur per correlariū tricesimesecūde secundi huius cōsonantia diapason q̄ consistit in p̄portione duorū ad unum minime in duo equalia partiet. et eodē quoqȝ iure neqȝ eadē consonātia in plura duobus dimetiet/dirimeturqȝ equalia. Et profecto velle hoc pacto consonantiā diapason in plura equa diducere. est in geometricis diametrū coste quadrati velle cōmensurare. sed id ultimū musicum nō est

Diapason ac diatessaron: consonantiam non esse. 24

E 8			f 3		G 2	
2	1	4	3			
A	b	c	d			

¶ Etsi in diapason ac diatessaron sit duarū vocum dulcis amenaqȝ cōgressio ut quēadmodum cum pulsatur sesquitonius: nō idcirco tamē evenit diapason ac diatessaron cōsonantiā dici mereri. Tametsi Ptholomeo secus q̄ Pithagoricis hac in re visum sit: quod monstratu facillimū est. Sint eni a et b binarius ꝛ unitas: minimi scȝ numeri consonātie diapason et c d quattuor ꝛ tria minimi itidem cōsonantie diatessaron duco c in a et veniet octonarius qui sit e: ꝛ d in b et veniet ternarius: qui sit f. per tertiam quinti Arithmetices e ad f continet duplā et sesquitertiā: quare diapason ac diatessarō.

sed e octonarius non est multiplex ad f ternarium: neque superparticularis quae cum bis contineat et insuper binarium qui ternarii nõ pars vlla est sed partes. est enim octonarius ad ternarium duplex subbipartiens. Non est igitur diapason ac diatessaron consonãtia. oẽs enim consonãtie aut in superparticulari: aut in multiplici genere ex diffinitione cõsistũt. Et in hoc facile cognosci potest ex nono problematum libro quod Pythagoricis cõsensit Aristoteles: cum inquirit cur non bis diapente aut bis diatessaron reddi consonãtia potest: vt bis diapason coaptari solet. Hoc inquit ideo est quod diapẽte consonãtia posita in proportione sesqualtera est diatessaron vero in sesquitertia. quod si duo sesqualteri aut sesquitertij numeri ordine disponãtur: extremi nullam inuicem proportiõem habebũt. neque enim superparticulares neque multiplices esse poterũt. at diapason concinẽtia quam in duplari proportione cõsistit: hac geminata: quadruplam inuicem extremi tenebũt/habebũtque proportiõem. Vides ergo quo pacto Aristoteles consonãtiarum proportiones solas superparticulares aut multiplices efficit: superpartiẽtes quasi prorsus nulle sint repudians. Et re vera Ptholomei cum Pythagoricis magis in noĩe quam in reipsa dissentio putanda est. sed de his hactenus.

25 ¶ Diapason ac diapente: in triplici consistit ratione. estque diapason ac diapente consonantia vna.

¶ Q ui enim diapason ac diapente in tripla rõne cõsistat: hoc ideo est quod ex duodecima primi ex duplici atque sesqualtero interuallo triplex nascitur interuallum. duplex autem et sesqualter sunt consonãtiarum diapason et diapente interualla. igitur iuncte consonãtie diapason ac diapente in tripla rõne cõsistunt. sed cum sensu iam satis sit exploratum hunc cõcentum modulate/suauiterque ad auditum peruenire: ergo per diffinitiõem is concẽtus consonãtia est. quod est totum propositum.

25 ¶ Diapason diapente ac tonus: melos citra consonantiam eliciunt.

27			8
e			f
3	1	9	8
a	b	c	d

¶ Melos hic vocamus suauem auribus acceptam voculationem/ amenãque plurium vocum cõgressum. sed quod diapason diapente et tonus simul iuncta melos constituãt: statim notum est. Nam hec sonorum voculatio suauiter vt experiẽtia discitur auribus accidit. sed quod consonãtiam nullã parẽt: ostẽditur. quoniam enim per precedẽtem diapason ac diapente in tripla proportiõe consistit. sint ergo a b tria et vnum minimi consonãtie diapason ac diapente numeri/ et c d nouem et octo minimi numeri toni. duco c in a et d in b et veniãt e f 27 scilicet et 8 inter que est diapason diapente atque tonus. sed e ad f neque superparticularis neque multiplex: quinimo e continet f ter et tres eius octauas: estque e ad f triplus supertripartiens octauas. non cõcinit igitur e f aliqua consonãtia. quod totum est propositum.

27 ¶ Bis diapason consonantia: in quadruplari constituta reperitur habitudine.

¶ Q ui enim bis diapason in quadruplari cõsistat: statim est manifestum. Nam per decimãtertiam primi duo duplicia interualla quadruplex iungunt interuallum. diapason autem in duplari cõsistit. igitur bis diapason quadruplarem iungit habitudinem: que est multiplex. et cum bis diapason ad auditum suauis/emodula taque perueniat vt id quoque sensu satis perceptum est. quod per diffinitiõem erit consonãtia. quod erat mõstrandum.

¶ Pythagorici et priores musici oẽs: concentuum modum in termino quadruple atque in finibus consonãtie bis diapason perstrinxerũt: non temere lõgius progressi aut quod inter illos terminos vniuique factus a natura reperitur sue vocis modus/ aut quod stridulus ille canor illis vt iam quoque dictum est visus est quod ve teriam iam relinquat mediocritatem aut quod hactenus contẽplatio satis ipsis esse visa est ad musicam institutiõem. posteritas autem ad ter diapason vel et amplius adauxit ad terios vsque octuple lõgius euagata: de quibus necessaria speculatio non incũbere videtur: sed pauca paucis strinxisse satis erit. Nam qui modulatiõem supra bis diapason cognoscere desiderabũt: facili demõstratiõe vt precedẽtia percipient. bis enim diapason ac diatessaron in proportiõe quincupla sesquitertia cõsistit. et proinde plane cõsonãtis putanda nõ est. bis diapason ac diapente in proportiõe sescupla et ideo consonãtijs ãnumerata. ter vero diapason in proportione octupla.

28 ¶ Omnes consonantias: in data chorda suo ordine subiũgere: et eas sensu perceptibiliter experiri.



¶ Sit a b data chorda in qua propositum sit consonãtias diatessaron/ diapẽte/ diapason/ diapason ac diapente/ et bis diapason situare. colloco in signo a brachium circini imobile et ad totius chorde quartam partem extendo circini brachium mobile: et in termino eius pono notam c. deinde extendo idem brachium ad eiusdem chorde partem tertiam: et in terio pono d. mox ad totius chorde partẽ mediam quam designo nota e. deinde eodẽ brachio capio totius chorde bissen: hoc est duas tertias: et in terio bisses pono f. mox extẽdo circinum ad chorde dodrãtem: hoc est ad tres eius completas quartas: in cuius fine affigo notam g. tunc sic a b et c b per quartam huius consonat diatessaron. a b et d b per octauam diapente a b et e b per decimamoctauam diapason a b et f b per vicesimamquintam diapason ac diapente. postremo vero a b et g b per precedẽtem bis diapason. Suppone igitur musicale hemispherium sensum singulis chorde sonis et sonos ad totius chorde sonum diligẽter attẽde. et suo ordine propositas concinẽtias annotabis. quod promptius experiri valebis: si chorde a b chordam equisonam/ vnisonamque etiam collocaueris: cuius sonum cum singulis sectionum a b percussionibus non segniter attenderis.

Consonantiarū hoc pacto digestarum: finis consonantie diatessaron: ad finem diapente sonat tonum/ ad finem diapason: consonat diapente. ad finem diapason ac diapente: incōsonus. ad finem vero bis diapason: consonat diapente ac diapason. 29

a	c	d	e	f	g	h

Sint a/c/d/e/f/g/h modo qui dictus est digeste consonātie: dico c h finem ꝯsonātie diatessaron ad d h sonare tonum/ ad e h esse diapente/ ad f h incōsonū esse/ ad g h vero cōsonare diapente ac diapason. Nam per precedentem a h ⁊ c h est diatessaron et a h et d h diapente. dēpta ergo a h ⁊ c h diatessaron cōsonātia ab c h ⁊ d h diapente: per correlariū decime huius relinquit tonus. qđ aūt relinquit est c h ⁊ d h. igitur c h ad d h sonat tonum. et qm̄ per precedentē a h ⁊ e h ꝯcinit/ modulaturq; diapason substracta igit a h et c h diatessaron ab a h et e h ꝑ vicesimāscdam huius qđ relinquit est diapente. atqui quod relinquit est c h et e h. igitur c h ad e h ꝯsonat diapente. et qz per precedentem a h ⁊ f h consonat diapason ac diapēte: subducta igitur a h ⁊ e h ꝯsonātia diapason: qđ relinqtur est diapente. quod aūt relinquit est e h ⁊ f h. igitur e h ⁊ f h consonantia est diapēte. sed ꝑ modo monstratū c h ⁊ e h etiā diapente est: igitur c h ⁊ f h est bis diapente. at ꝑ decimāquartā huius bis diapente ꝯsonātia componi nō potest: igit c h ad f h incōsonus est. postremo qm̄ ut ex ꝓcedēti notū est a h ⁊ g h ꝯsonat bis diapason. dēpta igit a h ⁊ e h diapason ꝯsonātia relinqtur e h et g h eē diapason. atqui c h ⁊ e h per scdam ꝑtem huius mōstrata est esse diapente. igitur adiecta c h et e h consonātia diapente ad e h ⁊ g h cōstituitur diapente ac diapason. cōsonat ergo c h ⁊ g h diapente ac diapason. quod est totum propositum.

Sic positis consonātijs: finis diapente ad finem diapason modulatur diatessaron/ et ad finem diapason ac diapente: modulatur diapason. ad finem vero bis diapason euphonus est: sed qui nondum consonantia est. 30

a	c	d	e	f	g	h

Esto precedētiū hypothesis: dico d h finem diapente ad e h consonare diatessaron. ad f h diapason. et ad g h sonare diatessaron ac diapason. Nam per penultimā a h et e h cōsonātia est diapason. et a h et d h diapente. substracta igitur a h ⁊ d h diapente: ab a h ⁊ e h ꝯsonātia diapason: per vicesimāscdam huius relinqtur diatessaron. qđ aūt relinqtur est d h et e h. igit d h ad e h ꝯsonat diatessaron. et qz in precedēti monstratū est e h ⁊ f h eē diapente: et nūc d h et e h esse diatessaron: ergo per vicesimā huius d h et f h ex illis duabus cōflata coalitaq; cōsonātia modulabit diapason. Rursum cū e h ⁊ g h in ꝓcedenti mōstrata sit diapason: et e h et f h diapēte: ergo per vicesimāscdam hu⁹ f h ⁊ g h est diatessaron. et d h et f h nunc mōstrata est diapason. igitur d h ⁊ g h est diapason ac diatessaron: que cū modulatio sit euphona ⁊ eā monstrauerit vicesimaquarta huius non esse ꝯsonātiā totū liquet mōstratū ꝓpositū. et ex hac quoq; pariter cognitū est finem diapason ad finem diapason ac diapente modulari diapēte ut e h ad f h et ad finem bis diapason cōsonare diapason.

Consonātiarū sic collocatarū: totius chorde atq; cuiusq; sectiōis nūeros designare. 31

24	18	16	12	8	6	
a	c	d	e	f	g	h

Duco duo/ tria/ et quattuor in seinuicem: et numerū inde surgentem atq; ꝓductū qui hēbit scdam tertiam ⁊ quartā: pono totius linee numerum quē iccirco voco numerum a h ab quo demo quartam partem et reliquus sit c h: et erit ꝓmus numerus ad ipm sesquitertius. quare diatessaron. et ab eodē numero demo partem tertiam ⁊ residuus sit d h: eritq; a h ad d h sesqualter: quare cōsonātia diapēte. et iterū ab a h diduco ꝑtem mediā et residuus sit e h: eritq; a h ad e h duplus. ꝗcirca diapason ꝯsonātia inter eos exurget. et nūeri a h sumo solā tertiam ꝗ sit f h: erit ergo a h ad f h ꝓtitudo tripla. cōtinebūt igit a h et f h diapason ac diapēte. Rursum numeri a h sola quarta sit g h: erit a h ad g h quadruplus. quare a h et g h sont numeri bis diapason. sunt itaq; totius chorde a h ⁊ cuiusq; sectionis eius ꝑm assignatas consonātias designati numeri. quod erat demonstrandum.

Quotcunq; harmonicas medietates assignare: inter quarū terminos eorūq; differentias omnes musice reperiantur consonantie. 32

Harmonice	12	8	6		Epitritus	b c	Diatessaron
Medietates	6	4	3		Hemiolus	a b	Diapente
	a	b	c		Duplaris	a c	Diapason
Differentie		2	1		Triplaris	c e	Diapason diapente
		d	e		Quadruplaris	b e	Bis diapason.

Harmonica medietas in Arithmeticis diffinita est qñ trium terroꝝ ut maximus ad minimū: ita dr̄ia maiorū ad dr̄iam minorum. Sit ergo c quicūq; nūerus partem tertiam habens que sit e: duplo c. sitq; duplatus a. manifestū est a ad c esse duplum. et qz c ꝯtinet tria e: ipm a ꝯtinet sex e. addo e ad c ⁊ fiat b

et erit notū b ad c esse sesquitertiū: et b cōtinere quattuor e atq; e esse dr̄iam b ad c. Jnde q: b cōtinet quattuor e et a cōtinet sex e: a erit sesqualter ad b. et q: b equatur quattuor e: et a sex: ergo dr̄ia a ad b equatur duobus e que sit d. quia eni d equatur duobus e: ergo d duplus est ad e. dico ergo a b c datam esse harmonicam medietatem: inter cuius terminos a b c ⁊ eorū differentias d e oēs musice consonātie reperiātur. nam a ad b maximi ad minimū mōstrata est ꝓportio eē dupla et similiter habitudo d ad e dr̄ie scʒ maioris ad differētiam minoris etiā ostensa dupla. sunt igitur per diffinitionē a b c termini in harmonica medietate ꝯstituti. At si b ad c cōpares mōstratus est sesquitertius: quare ꝯsonātie diatessaron interuallū. et si a ad b: mōstratus est sesqualter atq; hemiolus et diapēte interuallū. et si a ad c: duplū habes ⁊ ꝯsonantiā diapason. si vo c ad e cōtuleris. habes triplū: et ꝑ vicesimāquintā tertii ꝯsonantiā cōpositam diapason ac diapente. et si b ad e: quadruplū / et per vicesimāseptimam tertii bis diapason. at cū cetera mōstrata sint non eē consonātias: cōstat diatessaron / diapente / diapason / diapason ac diapente / ⁊ bis diapason oēs consonātias quibus in disciplinis se exercere solent musici: inter terminos harmonice medietatis ⁊ eorū differētias: fuisse repertas. et si duxeris binariū in a b c ⁊ in illos q̄ inde ꝓuenerint et quoties volueris in ꝓuenientes: ex septima secūdi Arithmetices cognoscere prōptum est totiens cōstitui harmonicam medietatem cōsimiles inter suos terīos ⁊ suorū terīorū dr̄ias: cōsonātias musicas seruātem. et idem fuerit si quēcunq; alterū numerum in illos terīos duxeris. placuit tn̄ diuo Seuerino quadragesimo octauo capite secūdi sue Arithmetices ad oēs ꝯsonātias musicas cōplectēdas: duas ordinare medietates harmonicas: vnam in duplari / et alteram in triplari. sed ⁊ idem etiā fieri posse vna sola constituta iam satis monstratum arbitramur.

53 ¶ Quotlibet maximas harmonias quarū quelibet primordium consonantiarū / consonātiasq; contineat omnes: constituere.

Maxima har.	24	18	16	12			
Maxima har.	12	9	8	6	Epogdous	b c	Tonus
	a	b	c	d	Epitritus	a b	Diatessaron.
Differentie	3			3	Hemiolus	a c	Diapente
	c			f	Duplaris	a d	Diapason
Differentie	4			2	Triplaris	d h	Diapason diapēte
	g			h	Quadruplus	c h	Bis diapason.

¶ Maximam harmoniam vocant qū quattuor solidorū terīorū in geometrica medietate cōstituto similiter maxim / vnū medioium ⁊ minimū medietas Arithmetica ꝯtinetur: et rursum inter maxim terīorū / alteru mediorū / et minimū cōtinetur harmonica. Medietas geometrica est qū terminorū est ꝓportionū similitudo. Arithmetica vo qū terīorū est differētiarū equalitas. quid harmonica iam dictū est. Solidi termini dicunt qui ex triū in se laterū ductu ꝓducūtur. sed hec oīa ex Arithmeticis ꝯnotissima sunt. Primordium ꝯsonātiarū appellamus tonum. ¶ Capio ergo d numerū quēcūq; qui scdam ⁊ tertiam habeat: sitq; eius secūda f et tertia h. duplo d ex sit duplatus a: quinquidē a duplus erit ad d. ad d b ad d sitq; cōpositus c. eritq; sesquitertius ad d. sed et cū a mōstratus sit duplus ad d: ꝑ per vndecimam ꝑmi huius a ad c est sesqualter. Preterea f scdam partem d ad d ipi d et cōpositus sit b: certū est b ad d esse sesqualterū. q̄re ꝑ eadem vndecimam ꝑmi a ad b est sesquitertius. Ab a c igitur qui mōstratus ē sesqualter: ablato a b sesquitertio per quīntādecimā ꝑmi relinqtur b ad c sesquioctauus. Sit preterea g dr̄ia a ad c q: d ꝯtinet tria h: c continebit q̄ttuor et a sex. ergo g dr̄ia a ad c ꝯtinet duo h. est itaq; g ad h duplus. et quia f est medietas d / et b est sesqualterū ad d: ergo b cōtinet tria f. est itaq; f tertia ps b. sed ⁊ a sesquitertius ad b addit sup eū tertiam ptem ipius b: ergo dr̄ia a ad b que sit e equat f. dico ergo a / b / c / d maximā cōstituere harmoniam: que tonū ꝯsonātiarū elementum / ⁊ oēm cōplectit ꝯsonantiā. Nam a ad b mōstratus sesquitertius ⁊ similiter c ad d sesquitertius. cōtinēt igit a ad b et c ad d per diffinitionē: geometricam medietatem. et dr̄ia a ad b maximi ad vnū mediorū est e et b ad d eiusdē medij ad minimū est f / et e ⁊ f mōstrate sunt equari. igitur per diffinitionē a ad b et b ad c constituūtur in Arithmetica medietate. sed ⁊ a ad d maximus ad minimū mōstratus est duplus: et similiter g dr̄ia a ad c maximi ad reliquū mediorū demōstrata dupla ad h dr̄iam c ad d eiusdem medij ad minimū. igitur per diffinitionē a c d ꝯstituūt in harmonica medietate. Cōstat igit ꝑ diffinitionē a / b / c / d si solidi sint cōstituere maximam harmoniam. q: si solidi non sint: duc quēcunq; nūerū in quēlibet ipsorū et ꝓueniēt solidi in eisdem habitudinibus quorū cuiuslibet latera erūt vnitas / numerus in illos ductus et singuli eorū ad singulos: sicq; cōstabit maximam constitutam esse harmoniam. sed iam ostensus est b ad c sesquioctauus: igitur per diffinitionē b ad c cōtinet tonū consonātiarū ꝑmordiū. et a ad b est sesquitertius. igit a ad b ꝯtinet diatessaron. et a ad c mōstratus est sesqualter: igitur a ad c cōtinet diapente. et a ad d duplus: igitur a ad d diapason. et d ad h triplus: igitur d ad h diapason ac diapente. et c ad h mōstratus quadruplus: igitur c ad h cōtinet bis diapason. et quoties duxeris quēcunq; numerum in a / b / c / d aut in ꝓductos ex illis adiuuāte septima secundi Arithmetices ⁊ diffinitionibus: toties cōstitues maximā harmoniā: tonum et oēs consonātias continentem. est igit effectum qd ꝓponebatur. Et ex hac intelligere potes esse demōstratum que diuus Seuerinus affert de harmonia cubi quadragesimonono / et de maxima harmonia quinquagesimoquarto capite secundi sue Arithmetices.

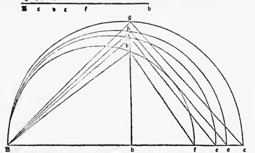
54 ¶ Ois numerus ternaria ꝓgressione ad se adiectus: oēm consonantiam in Arithmetica medietate complet.

Cõsonãtie l Arithmetica medietate				A prima a vnitate				A scda vnitate				A tertia a vnitate			
3	6	9	12	1	2	3	4	10	20	30	40	100	200	300	400
duplus diapason		sesquitertius diates.		duplar	epitrit'			diapas.	diates.			diapason	diatessa.		
	sesqualt' diapẽte			hemiol.					diapẽ.				diapente		
Triplus. diapason diapẽ.				Triplaris				diapa. diap				diapa. diapẽte			
Quadruplus. bis diapason				Quadruplaris				Bis diapason				Bis diapason			

Intelligit ternaria ꝓgressiõe ad se addi numerus qui additur primo ad se semel, deinde bis, deinde ter. dico ergo quẽcunq̧ numerũ ad se hoc pacto additum modo cõstituere consonãtiã musicam. Nam semel sibi adiectus duplex ad se efficit, et diapason consonãtiam. et bis sibi additus: ad primã additionem sesqualter cõstituit et diapente: et ad se triplũ atq̧ diapason ac diapente. nam in prima additiõe bis, et in secũda ter cõtinetur. ter vero sibi additus ad secũdã additiõem facit sesquitertiũ et diatessaron: nam primus nũerus hic quater, illic vero ter cõtinetur. et ad se quadruplũ facit et bis diapason. in hac igitur ꝓgressione ois cõtinetur cõsonãtia musica. et q2 cõtinue numerorũ ex eius additiõe surgentiũ ipse numerus additus est differẽtia: ergo reperte consonãtie in Arithmetica medietate continentur. et ex hac cognoscitur cur in oim vnitatum quaternaria ꝓgressione que vbiq̧ denarii Pythagorici plenitudinem implet: oẽs consonantie musice et in Arithmetica quidem medietate reperiãtur.

Tonum et oẽm consonantiam simplicem: in duo equa partiri, veraq̧ medietatum puncta in chorda: geometrice monstrare. 35

Precedẽtes septima scdi et vicesimatertia tertii ptẽdũt toniũ, diatessaron, diapẽte ac diapason: in duo equa diuidi non posse. hec vero mõstrat quo pacto ea omnia possint in duo equa partiri. nec hoc quidẽ repugnat. Nã precedẽtes contẽdunt id effici non posse Arithmetice certo, cõstitutoq̧ numero, atq̧ rationali habitudine: hec vero id effici posse geometrice sine numeri certa, cõstantiq̧ ratione.



Sit ergo data chorda a b superior in qua iubeamur integrum semitonium, et consonãtiarũ diatessaron, diapente, ac diapason vera media reperire. facio a b et c b tonum. a b et d b diatessaron. a b et e b diapente. a b et f b diapason eo qui in precedẽtibus mõstratus est modo. deinde in inferiori linea a c indefinite quãtitatis capio a b equale linee superiori a b et b c ptinue equalem linee b c superiori. et a puncto b versus c capio lineam b d equalem chorde b d et b e equalẽ chorde b e et b f chorde b f. et intelligo qtuor dimidios circulos a c, a d, a e, a f. et a puncto b educo perpẽdicularẽ linee a c ad circũferẽtias semicirculorũ a c, a d, a e, a f. et pũcta vbi eã cõtingit linea sint g, h, i, k: a quibus pũctis educo a g, c g, a h, d h, a i, e i, a k, f k. at per nonã sexti geometrie a b ad b g vt b g ad b c. facio igit in chorda superiore a b lineam b g equalẽ inferiori linee b g et cũ ꝓportio a b ad g b vt g b ad c b vt precõcessum est: sequitur tonum a b et c b esse in duo equa diuisũ: et pũctũ g esse medium veri semitonii signũ. et per eãdem que ꝓportio a b ad b h ea sit b h ad b d. esto igitur h b in chorda a b equalis linee b h, per idem vt prius: ea erit ꝓportio a b ad h b que h b ad d b. quare a b et d b diatessaron in duo equa partita est. et eodem pacto facta chorda i b superiori equali linee b i. et chorda k b equali linee b k: mõstrabis cõ

sonātias diapēte & diapason in duo equa esse partitas. et re vera hoc pacto vera schismata atque diaschismata et dieses tetrartemerias reperias assignat' cōmatia dieseos atque cōpleti semitonii intervalli et sumptis ut in precedentibus factum est mediis proportionalibus chordis. sed hec statim aliquantulum in geometricis exercitatis nota esse possunt. Hec aūt posteaque repereris disce (si libet) per chordam in voce tonum mediare, et semitonium et quācunque voles in arte musica consonantiam.

℃ Tertii elementorum Musices finis.

h Armonica regula instrumentū est: quo cum (rationis adhibito iudicio) consonantie consonātiarūque partes: in chorda perquirūtur. Melorū tria sūt genera: Diatonicum/ Chromaticū/ Enarmonicū. Diatonicum genus: melos est cuius partitio per semitonium minus & duos tonos cōtinue procedit. Chromaticum: qd per duo inequalia semitonia & triemitonium cōscēdit. Enarmonicū vero: qd per duas dieses conscēdit et ditonum. Diesis hoc in loco semitonii minoris medietas est: ex differētie extremorum habitudinis eius partitione proveniens: que & tetrartemeria dicta est. sed ut earum semper maior que acutior/ et minor q̄ gravior: reperiatur necesse est. Voces nervi/ chorde/ spacia: hoc ordie a gravi in acumen nitentia in unoquoque melorum gn̄e sunt nūcupata.

Grece nuncupationes	Nuncupationes latine.
℃ Proslambanomenos	Acquisitus
Hypate hypaton	Principalis principalium
Parhypate hypaton	Subprincipalis principalium
Lichanos hypaton	Index principalium
Hypate meson	Principalis mediarum
Parhypate meson	Subprincipalis mediarum
Lichanos meson	Index mediarum
Mese	Media
Trite synezeugmenon	Tertia coniunctarum
Paranete synezeugmenon	Penultima coniunctarum
Nete synezeugmenon	Ultima coniunctarum
Paramese diezeugmenon	Submedia disiunctarum
Trite diezeugmenon	Tertia disiunctarum
Paranete diezeugmenon	Penultima disiunctarum
Nete diezeugmenon	Ultima disiunctarum
Trite hyperboleon	Tertia excellentium
Paranete hyperboleon	Penultima excellentium
Nete hyperboleon	Ultima excellentium

℃ Monochordum: est qd unica chorda cōtinet modulationem. Tetrachordum: quod chordis quattuor. Polichordum vero: quod pluribus chordis id cōtinet q̄ quattuor. ut pentachordum: qd quinque. hexachordum: quod sex. et ita de heptachordo/ octochordo/ ennachordo/ decachordo/ endecachordo/ dodecachordo/ tridecachordo/ tessaradecachordo/ & pentadecachordo est intelligendum: qd ultimum omnino quindecim constat chordis. ℃ Proslambanomenos: est in unoquoque genere: primo tetrachordo: ut gravissimus nervus adiūctus: a primo primi tetrachordi nervo: toni intervallo distās. Tetrachordum coniūctū: est cuius principiū est precedētis tetrachordi finis. Disiūctum vero: cuius primordialis nervus in unoquoque melorum genere: a primo precedentis tetrachordi finali nervo: uno tono disiungitur.

¶ Tetrachorda sunt quinq3: Tetrachordū hypaton/Tetrachordū meson/Synezeugmenon Diezeugmenon/Hyperboleon.

¶ Tetrachordum hypaton est:	Tetrachordum synezeugmenon.
Hypate hypaton	Mese
Parhypate hypaton	Trite synezeugmenon
Lichanos hypaton	Paranete synezeugmenon
Hypate meson	Nete synezeugmenon
Tetrachordum meson est:	Tetrachordon diezeugmenon.
Hypate meson	Paramese diezeugmenon
Parhypate meson	Trite diezeugmenon
Lichanos meson	Paranete diezeugmenon
Mese	Nete diezeugmenon

Tetrachordum hyperboleon

Nete diezeugmenon

Trite hyperboleon

Paranete hyperboleon

Nete hyperboleon

¶ Modū hic vocamus remissionem aut intensionem oīm tetrarchordorū gradatim in aliquo genere melorum: sui generis progressionem seruans.

¶ Modi sunt septem.

¶ Primus Hypodorius	1
Secundus Hypophrygius	2
Tertius Hypolydius	3
Quartus Dorius	4
Quintus Phrygius	5
Sextus Lydius	6
Septimus Mixolydius	7

¶ Monochordi regularis partitionem: in diatonico genere demonstrare.

¶ Quāuis instrumēta musices ꝙ plurīa reperiātur vt Cithare Tibie/Tube Litui/Multiforatiles fistule: Dextre/Leue/Simplices/Duplices: in quib⁹ vno spiritu animādia vt inquit Apuleius. ferē Diagnia Lydorū rex Marsieꝗ patet ꝑmus in canēdo manus discapedinasse: preterea vt Pelte/Chordacisse/Sambuci/Hydraule/Nabilie/Psalteria/Magades/Barbiti/Naula/Pētades/Cornus/Heptagona/Mele/Testudo/Barbati/Plectra/Monochorda/Tetrachorda/Polychorda: et ceteris gen⁹ musica instrumēta. placuit tū Philosophis in Monochordis Tetrachordis atꝗ Polychordis monstrādis: ceterorū nos intelligere rōem atꝗ compositionem. quocirca vt de Monochordorum et Tetrachordorū compositione intelligemus: ita de reliquis est intelligendum. nunc ergo ad Monochordi regularis nos ostensionem cōuertamus.

Monochordū diatonicum.

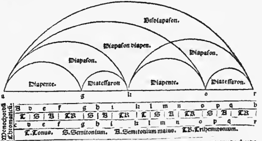
A	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	b	
T	S	T	T	S	T	T	T	S	T	T	S	T	T		
c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	a	p	q	r	

T Tonus S Semitonium minus

¶ Monochordum igit reglare ideirco dicitur ꝙ in vnico neruo musice consonātie harmonica regula peruestigētur. Sit ergo a b chorda in qua volumus in diatonico gñe cōsonātias regulari collocare.

Accipio c planissimã regulam/ nullaq; ex parte subsultãtem: equalem linee a b. et per primã et decimã octauam secũdi huius ab c in d distẽdo tonum. et ab d in e semitoniũ minus. et ab e in f et f in g intendo duos tonos. et ab g in h semitoniũ minus. ab h in i et i in k duos tonos. Rursus ab k in l tonum. et ab l in m semitonium minus. ab m in n et n in o duos tonos. ab o in p semitoniũ. ab p in q et q in r duos tonos. ita q; cõtinue semitonio minori subiiciũt sint duo toni: dẽptis c d qui p proslambanomeno pma semitonio prepositus est tonus: et k l tono qui tetrachordi diezeugmenon hoc est disiũcti principiũ est. Rursum applico totam regulã harmonicam c r toti chorde a b. itaut c sit cum a: et r cũ b. et in chorda a b vbi applicãtur d/ e/ f/ g/ et relique sectionum regule note: signo d/ e/ f/ g/ h/ i/ k/ l/ m/ n/ o/ p/ q et dico monochordũ a b esse in gñe diatonico regulariter diuisum. Quõ eni3 sua interualla interuallis regle c r rñdent/ euadũtq; equalia a b et d b sonat tonũ et d b et e b semitoniũ: et iterũ e b et f b tonũ cõtinet. Igitur a b et f b duos tonos et semitoniũ minus cõtinẽs: per sextam tertij cõsonat diatessaron. Et quia f b et g b vt in regula cõtinet tonum. et g b et h b semitonium minus. et h b et i b. et i b et k b duos tonos. ergo per decimam tertij f b et k b etes tonos semitoniũq; minus cõtinens: cõcinit diapẽte. Sed et mõstratũ est a b et f b modulari diatessaron. q per vicesimam tertij a b et k b q8 ex cõsonãtijs diatessaron et diapente cõsurgit coalitum: cõsonat diapason. Rursus k b et l b sonat tonum l b et m b semitonium minus m b n b et o b duos tonos: quare k b et o b tres tonos et semitoniũ minus cõtinens: per decimã tertij cõsonat diapẽte. Sed a b et k b mõstrata est diapason cõsonãtia: ergo a b et o b cõsonat diapason ac diapẽte. Preterea q2 o b et p b semitoniũ est et p b q b et b duo toni: ergo o b et b cõcinit diatessaron. k b igitur et b ex diapente diatessaronq; cõstans: per vicesimã tertij cõsonat diapason. At vo a b et k b iridẽ mõstratũ est cõtinere diapason. ergo a b et b cõcinũt bis diapason. Et q2 her monochordi partitio per semitoniũ et duos tonos facta pcessit: et ee que modo mõstrate sunt cõsonantie harmonice regule suffragio peruestigate: ergo monochordi reglaris partitio in genere diatonico per diffinitiõem mõstrata est. quod est propositum.

2 ¶ Monochordi regularis constitutionem: in genere Chromatico declarare.



¶ In omni Monochordo/ atq; Polychordo hec obseruat ppetuo vt octaua modo nota/ modo chorda prime: et decimaquinta octaue: in consonãtia diapason recrepet. et vbiq; p proslambanomeno prefigit tonus/ inserit q; vbiq; inter mesen atq; paramesen p concẽtu desũcto tonus. hoc est in monochordis a prima nota in scdam et ab octaua in nonam collocatur tonus. Sit ergo a b vt prius chorda in qua volumus cõsonantias in genere chromatico regulariter reperire. capio c r regulam planissimã et illi assignate corde equã. facioq; per primam secũdi huius c d tonum: et p decimãoctauã eiusdẽ d e semitoniũ minus: et iterũ per primam d f toni interuallũ. erit ergo e f semitoniũ maius: et d e et e f duo semitonia: sc3 et ab f ad g metior tonum et semitoniũ min9: que equa erũt trihemitonio: et g h et h i facio duo semitonia: minus sc3 atq; maius et i k extẽdo ad tonũ et semitoniũ minus. Simili quoq; pacto k l fiat tonus: et l/ m/ n duo semitonia: et n o trihemitoniũ. et iterũ o/ p/ q duo semitonia: q r vo trihemitonium. Et regulã hoc pacto diuisam applico ex equo linee a b: et in linea a b signo cõsimiles et cõsimiles notas: sc3 a/ d/ e/ f/ g/ h/ i/ k/ l/ m/ n/ o/ p/ q/ b. quo pacto dico lineam a b esse regulariter in melodia chromatica diuisam. Nã c d tonus et d f tonus et f g tonus et semitoniũ minus. quare a et g continent tres tonos et semitoniũ minus. ergo per decimã tertij a ad g cõsonat diapẽte. et q2 g h i cõtinent tonũ: et i k trihemitoniũ: igitur g ad k duos tonos et semitoniũ minus cõtinens per sextam tertij modulat diatessaron. sed et a g pbata est diapente: ergo a k cõstans ex a g et g k diapente et diatessaron per vicesimam tertij cõcinit diapason. Et penitus eadem rõne pbaueris k o cõsonare diapente/ et k b diapason. quare a o diapason ac diapente et a b recrepabit bis diapason: quã consonãtia3 non trãscẽdere Pythagoricorũ vetat autoritas. qui tñ volet vlterius conscẽdere ex his q iam demõstrata sunt et que

postea demōstrādā suscipient: facile cōcedet. Et cū iam mōstrata partitio per semitoniū et semitoniū et tribemitoniū processerit: nisi ubi integer adiectus est tonus ut tum diapason tum cōcētus dissicet servet ꝓportiões: Patet ꝙ ex diffinitiōe factū est qđ in chromatico gñe ꝓponebat faciēdū atq₃ ꝓpositū.

Idem: in enarmonico genere regulariter ostendere. 3

A						Monochordum Enarmonicum.								b
T	D	D	TT	D	D	TT	T	D	D	TT	D	D	TT	
c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q	r

D. Diesis tetrartemeria. TT. Ditonus.

Sit ut prius chorda a b et c r regula eidem ut in ceteris equa: ab puncto c ad d extēdo tonum: et ab d ad f semitoniū min⁹: et spaciū d f partior in equalia per notam e. erūtq₃ d e f due dieses. et f g facio duos tonos: qui ditonū implent. g h i ut prius duas dieses. i k ditonum. k l tonum. l m n duas dieses. n o ditonum. o p q duas dieses. et q r ditonum. quā regulā hoc pacto partitam equalit applico linee a b: et illes notas/equalia₃ intervalla in linea a b designo per medias inter a et b litteras d/e/f g h/i k l m n o p q b. et quia a d ton⁹: et d e f due dieses semitoniū minus implentes: et f g ditonus: ergo a g trito toni et semitonium minus per decimam tertiā sonāt diapente. sed et g h i due dieses et i k ditonus duos tonos et semitoniū minus cōtinētes: per sextam tertiā sunt diatessaron. igit ut prius p vicesimā tertiā a k cōtinet diapason. et hoc pacto mōstret k o cōtinere diapētē: et k b diapason: q̄re a o ꝯsonare diapason ac diapente et a ad b cōsonare bis diapason. et q₃ hec modulationis ꝓgressio p duas dieses et ditonū ꝓcedit: cōstat per diffinitiōem monochordū enarmoniū regularit esse partitū: in eoq₃ musicas situatas esse consonātias et propositum.

Tetrachordum hypaton in diatonico melo dividere. 4

Proslambanomenos	A	A					
Hypate Hypaton	b	T	B				
Parhypate Hypaton	c	S		C			
Lichanos Hypaton	d	T			D		
Hypate Meson	e	T				E	

Superiores: Monochorda docuerūt ordinare. Inferiores aūt: Tetrachorda Pētachorda Hexachorda et alia queq₃ Polychorda ad Penthadecachordū usq₃: quibus cognitis cetera que amplius desiderarētur cognoscent facillime. Costituo ergo b c d e tetrachordū hypatonura ut b sit hypate hypaton c parhypate hypaton d Lichanos hypaton e Hypate meson: cui preiūgo ad gravitatis partē a Proslambanomenon chordam quidē que in tetrachordis non computatur: sed primo adiecta tetrachordo creat pēthachordum. facio ergo intervallum chorde a sesquioctauū ad chordam b et sesquitertium ad chordā d/et sesqualterū ad e. Item facio c ad d sesquioctauū. dico ergo tetrachordū hypaton in genere diatonico (ut dictū est) esse divisum. Nā per diffinitiōem a ad b proslambanomenos ad hypaten hypaton: erit tonus. et quia a ad d sesquitertiū est: itidem per diffinitiōez proslābanomenos ad lichanon hypaton concinit diatessaron. sed et cū a ad e proslambanomenos ad hypaten meson sit sesqualterū: per idem a ad e cōsonat diapente. per decimātertiam igitur tertij d ab e lichanos hypaton ab hypate meson tono disiungit. Rursum q₃ c ad d sesquioctauū est: ergo c ad d sonat tonū. at ꝗ̄ d a ad d diatessaron est: et a b tonus est/et c d tonus: igitur per sextam tertij b ad c relinqtur semitonium minus. Est itaq₃ hypate hypaton ad parhypaten hypaton semitoniū min⁹. et parhypate hypaton ad lichanon hypaton ton⁹: lichanos hypaton ad hypaten meson ton⁹. cōstitutū est ꝙ b c d/e tetrachordū hypaton: per semitoniū minus et duos subiūctos tonos ꝓcedēs: per diffinitiōem in genere diatonico pariter et pēthachordū a b/c/d/e. Sed incidit dubitatio forsan: cur nr̄a tempestate musici duos tonos ad tetrachordon partem seriam graveq₃ prelocāt: nos aūt solū tonum qui est proslambanomeni atq₃ hypates hypaton: responsio pervia in ꝓptuq₃ est musicos nostra tempestate proslambanomeno alteram chordam tono distantem prefixisse et id primum memorāt Gregorium factitasse.

In eodem diatonico melo: tetrachordum meson subiungere. et in octochordo: a proslambanomeno in mesen: diapason contineri. 5

Proslambanomenos	A	A								
Hypate Hypaton	b	T	B							
Parhypate Hypaton	c	S		C						
Lichanos Hypaton	d	T			D					
Hypate Meson	e	T				E				
Parhypate Meson	f	S					F			
Lichanos Meson	g	T						G		
Mese	h	T							H	

Sit e f/g/h tetrachordū meson. facio e sesquitertiū ad h/ et g sesquioctauum ad h/ et f sesquioctauū ad g erit ergo per diffinitionem e ad h hypate meson ad mesen diatessaron. et q₃ g ad h tonus et similiter

f ad g tonus. nam vtrũq; ex sesquioctaua ꝓportiõe nascitur. ergo p sextam tertij e ad f erit semitoniũ minus. est itaq; e f g h tetrachordum meson per semitonium minus et duos tonos procedens in genere diatonico diuisum. et quia a e proslambanomenos et hypate meson in precedẽti mõstrata sunt cõsonare diapente: et in pñti e h hypate meson et mese diatessaron. ergo per vicesimã tertij: proslãbanomenos ad mesen cõsonat diapason. cõtinet igitur octochordum a b c d e f g h consonãtiam diapason. quod est totum propositum.

5 ¶ Preposito octochordo: in eodem genere tetrachordum disiunctarum submittere. et dodecachordum diapason ac diapente continere.

Proslambanomenos	A			A
Hypate hypaton	b			b
Parhypate hypaton	c			c
Lichanos hypaton	d			d
Hypate meson	e			e
Parhypate meson	f			f
Lichanos meson	g			g
Mese	h			h
Paramese diezeugmenon	k	Trite coniunctarum	k	
Trite diezeugmenon	l	Paranete cõiunctarũ	l	
Paranete diezeugmenon	m	Nete coniunctarum	m	
Nete diezeugmenon	n			n

¶ Sit k l m n tetrachordũ diezeugmenon quod et disiuncta. ũ dicit. facio h ad k mesen ad paramesen disiunctarũ sesquioctauã. et ad m paraneten disiunctarũ sesquitertiã. ad n vero neten disiunctarũ sesquialterã. deinde l ad m triten ad paranete facio sesquioctauã: sic ergo mese ad paranetẽ disiũctarum cõcinit diatessaron et ad neten diapente. est ergo per decimãtertiam tertij m ad n paranetes ad neten toni interuallũ. et l ad m trites diezeugmenõ ad paranetẽ similiter tonus est. sed et cũ mese ad paranetẽ cõsonet diatessaron et l ad m sit tonus et similiter h ad k tonus ergo per sextã tertij k ad l erit semitoniũ minus. erit itaq; paramese ad triten diezeugmenõ semitoniũ minus: trite ad paraneten tonus: et paranete ad neten diezeugmenon consimiliter tonus. quare tetrachordũ disiunctarum superiori octochordo in diatonico genere subiunctũ est. Et cum precedens mõstrauerit a h esse diapason et presens h n esse diapẽte: ergo a n proslãbanomenos et nete diezeugmenõ in dodecachordo a b c n cõtinent diapason ac diapente. Nã si in minori canõe modo: tetrachordũ a chorda mese coniũctũ partiri cõstituere volueris: sit id tetrachordũ h k l m: que sunt mese trite synezeugmenõ paranete synezeugmenõ nete synezeugmenõ: facioq; mesen ad neten synezeugmenon sesquitertiã. quare et cõtinentẽ diatessaron et l ad m paranetẽ synezeugmenõ ad neten tono distãtem pariter et k ad l tono. erit ergo per sextã tertij h ad k mesen ad triten synezeugmenon semitonij minoris interuallũ et k l et l m duo toni et tetrachordum synezeugmenon hoc est disiunctarũ in genere diatonico diuisam.

7 ¶ Tetrachordum hyperboleon in eodem diatonico genere predictis copulare: et in pentadecachordo: bis diapason consonãtiam complere

A re	Proslambanomenos	A				A
b mi	Hypate hypaton	b				b
c faut	Parhypate hypaton	c				c
d solre	Lichanos hypaton	d				d
e lami	Hypate meson	e				e
F faut	Parhypate meson	f				f
G solreut	Lichanos meson	g				g
a lamire	Mese	h				h
b mi	Paramese diezeugmenõ	k	b fa	Trite syn.	k	
C solfaut	Trite diezeugmenon	l	c solfaut	Paranete syn.	l	
d lasolre	Paranete diezeugmenon	m	d lasolre	Nete syn.	m	
e lami	Nete	n				n
f faut	Trite hyperboleon	o				o
G solreut	Paranete hyperboleon	p				p
a lamire	Nete hyperboleon	q				q

	Tetrachordū hypaton							Tetrachordū diezeug.						
	To.	Semi.	To.	To.	Semi.	To.	To.	To.	Semi.	To.	To.	Semi.	To.	To.
A	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m	n	o	p	q
				Tetrachordū meson							Tetrachordū hypboleō			

¶ Sit n o p q tetrachordū hyperboleon facio vt in prioribus n neten diezeugmenon ad q netē hyperboleon sesquitertiā: et iccirco ad eam cōcinentem diatessaron. et p ad q facio toni interuallū. & o ad p similiter toni interuallū. per sextam tertij n ad o erit semitoniū minus. est ergo tetrachordum hyperboleon n o p q ex semitonio minore duobus subiunctis tonis in genere diatonico dimēsum. sed et ꝑ precedentē h mese ad n neten diezeugmenon ꝯsonat diapente: ergo h ad q mese ad neten hyperboleon ex cōsonantia diapente & diatessaron constans: cōsonāt diapason. ergo a ad q proslābanomenos ad netē hyperboleon cōsonabit bis diapason. et cum totum polychordum a q omnino quindecim perficiatur chordis: in pētadecachordo & in genere diatonico cōstitutum est bis diapason. qđ est totū propositū.

¶ Pentadecachordi in diatonica melodia constituti: numeros reperire. 8

Proslambanomenos	A	9	216	1728	13824	
Hypate hypaton	b	8	192	1536	12288	Tonus
Parhypate hypaton	c			1458	11664	Semi. minus
Lichanos hypaton	d		162	1296	10368	Tonus
Hypatemeson	e		144	1152	9216	Tonus
Parhypate meson	f				8748	Semi. minus
Lichanos mesan	g			972	771, ⁊	Tonus
Mese	h		108	864	6912	Tonus
Paramese diezeugmenō	k			768	6144	Tonus
Trite diezeugmenon	l			729	5832	Semi. minus
Paranete diezeugmenō	m		81	648	5184	Tonus
Nete diezeugmenon	n		72	576	4608	Tonus
Trite hyperboleon	o				4374	Semi. minus
Paranete hyperboleon	p			485	3888	Tonus
Nete hyperboleon	q		54	432	3456	Tonus
		pm⁹	scđus	tertius	qrtus loc⁹	

¶ Numeri qui in musica disciplina precipue desiderantur: sunt duplares/triplares/quadruplares/hemiolij/epitriti epogdoi: hoc est dupli/tripli/quadrupli/sesqualteri/sesquitertij/et sesquioctaui. quo circa si desideras cognoscere ad quem nume. si numerus maior est duplus: ipsum partire p duo. Ad quem triplus partire per tria. Ad quem quadruplus partire per quattuor. Ad quem sesqualter partire per tria et tertiā auge per duo. Ad quem sesquitertius partire per quattuor et quartā auge per tria. Ad quem sesquioctauus partire per nouem & nonam auge per octo. Et numeri: per octauā secundi Arithmetices vbiqꝫ surgent petiti: si maior duplus/triplus/quadruplus/sesqualter/sesquitertius/aut sesquioctau⁹ est. ¶ Et si ru. sum cognoscere desideras que numerus minor duplū habet: ipsum auge per duo. Quem triplum: auge per tria. Quem quadruplū: auge per quattuor. Quem sesqualterū: partire per duo & illi medietatē adde. Quem sesquitertiū: partire per tria/& tertiam adde. Quem sesquioctauū: partire per octo/et octauam adde. Et statim per eandē octauā et diffinitiones cognosces petitū. ¶ Sed nunc ad monstrandū propositum nos cōuertamus. Sit pentadecachordū in diatonico genere modo repertum: cuius numeri querūtur: a b c d e f g h i k l m n o p q. duco in seinuicem duo/tria/quattuor/et minimos toni: hoc est vigintiquattuor: in 9 et 8 minimos terminos toni et veniant in secundo loco a b que per septimā secundi arithmetices sunt in ꝓportione sesquioctaua/ et continentia tonum. capio sesquitertiū numeri a: sitqꝫ d/et sesqualterū qui sit e & subduplū qui sit h. Rursum sumo sesquitertium numeri h qui sit m et sesqualterum qui sit n & eius subduplum qui sit q. quia a ad d est diatessaron et a ad e diapēte: ꝗ per decimātertiam tertij d ad e tonus est et eadē quoqꝫ ratione m ad n tonus. Et si d octauā partem haberet ea eidē adiecta facerē c sesquioctauū ad d: et c d cōtinentia tonū. modo autē qꝛ d cōperitur octaua parte carere: augeo a b d e h m n q p octo: surgātqꝫ tertio loco a b d e h m n q: q nūeri per eandē septimā adinuicē eandē seruabūt ꝓportionē: quā & nūeri scđo loco positi. qꝛ ꝗ d tertio loco positus hꝫ octauā: ea igit adiecta ad d fiat c: eritqꝫ c ad d sesquioctau⁹ atqꝫ cū eo tonū ptinēs. itidē adiecta octaua parte h ad h fiat g. et octaua ptem ad m fiat l. & octaua q.

ad q fiat p. eruntq3 idẽ videm g ad h l ad m et p ad q sesquioctaui ꝛ numeri tonorum. et h comperitur habere nonam partẽ: illam augeo per octo et veniat k: eritq3 h ad k per octauã secundi arithmetices sesquioctauus. Et si g octauã partem haberet facerẽ f sesquioctauũ ad g. Ut vero qm̃ ea caret: augeo oẽs numeros tertio loco repertos per octo et exurgant in quarto loco a b c d e g h k l m n p q: qui per eandẽ septimã erunt in eisdem adinuicẽ habitudinibus vt et numeri tertij loci. adiecta igitur octaua eius parte ad g facio f. ꝛ octaua parte ad p facio o. dico ergo numeros quarto loco cõstitutos esse numeros pẽtadecachordi. Nã a ad d est diatessaron/ et a ad b tonus: ꝛ e ad d tonus. ergo per sextã tertij b ad c semitoniũ minus. et qꝛ a h est diapason ꝛ a e diapente: ergo per vicesimã tertij e h est diatessarõ et g h ꝛ f g monstrati sunt sesquioctaui atq3 toni. ergo per sextã tertij e f est semitoniũ minus. et eodẽ pacto ostendas k l et n o esse semitonia minora: ꝛ ceteri adinuicẽ sunt cogniti toni. igitur pentadecachordi diatonici numeri sunt reperti. Est enĩ numerus proslãbanomeni ad numerũ hypates hypatõ tonus: ꝛ hypates hypaton ad parhypatẽ hypatõ semitoniũ minus. parhypates hypaton ad lichanõ hypaton: et lichani ad hypaten meson duo toni. hypates meson ad parhypaten meson semitoniũ minus. parhypates meson ad lichanõ meson: et lichani ad mesen: ꝛ meses ad paramesen disiunctarum: tres toni. parameses ad triten semitoniũ minus. trites ad paranetẽ/ ꝛ paranetes ad neten: duo toni. Netes ad triten hyperboleon semitoniũ minus. trites ad paraneten et paranetes ad neten duo toni. est igitur notum propositum.

9 ¶ Tres diatonice diatessarõ consonãtie species a proslambanomeno ad parhypatẽ meson cõcinnunt. et quattuor diapente species a proslambanomeno ad triten diezeugmenon. septẽ vero diapason spẽs inter proslãbanomenon ꝛ paraneten hyperboleon.

		Species diatessarõ			Species diapente				Species diapason						
Proslamba.	A	pma	sc̃da	tertia	pma	sc̃da	tertia	q̃rta	pma	sc̃da	tertia	q̃rta	quĩta	sexta	sepĩa
Hypate hyp.	b	To.	o	o	To.	o	o	o	To.	o	o	o	o	o	o
Parhyp. hyp.	c	Se.	Se.	o	Se.	o	o	o	Se.	Se.	o	o	o	o	o
Licha. hyp.	d	To.	tonꝰ	tonꝰ	To.	tonꝰ	o	o	To.	tonꝰ	tonus	o	o	o	o
Hypate me.	e		tonꝰ	tonus	To.	tonꝰ	o	o	To.	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	o	o	o
Parhyp. me.	f			Semi		Se.	Se.	o	Se.	Se.	Se.	Se.	Se.	o	o
Licha. me.	g					tonꝰ	tonus	tonꝰ	To.	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	o
Mese	h						tonus	tonꝰ	To.	tonꝰ	tonus	tonꝰ	tonus	tonꝰ	tonus
Para. die.	k						tonus	tonꝰ		tonꝰ	tonus	tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonus
Trite die.	l							Se.			Se.	Se.	Se.	Se.	Se.
Para. die.	m											tonꝰ	tonꝰ	tonꝰ	tonus
Nete die.	n												tonꝰ	tonꝰ	tonus
Trite hyper.	o													Se.	Se.
Para. hyp.	p														tonus
Nete hyp.	q														

¶ Prima species diatessaron tono/ semitonio minore atq3 tono constat. Secũda semitonio et duobꝰ tonis. Tertia duobus tonis et sequẽte semitonio. ¶ Prima species diapẽte est que constat ex tono/ semitonio minore ꝛ duobus tonis. Secũda duobus tonis/ semitonio/ atq3 tono. Tertia semitonio et tribus tonis. Quarta tribus tonis et semitonio. ¶ Prima species diapason est que constat ex tono/ semitonio minore/ duobus tonis/ semitonio minore/ atq3 duobus tonis. Secunda semitonio/ duobus tonis/ semitonio et tribus tonis. Tertia duobꝰ tonis/ semitonio/ tribꝰ tonis/ atq3 semitonio. Quarta tono/ semitonio/ tribus tonis/ semitonio/ atq3 tono. Quinta semitonio/ tribus tonis/ semitonio/ duobus tonis. Sexta tribus tonis/ semitonio/ duobus tonis/ semitonio. Septima duobus tonis/ semitonio/ duobus tonis/ semitonio/ atq3 tono. ¶ Erit itaq3 p diffinitionẽ prima diatessarõ spẽs a proslãbanomeno in lichanõ hypaton. Nã proslãbanomenos ad hypaten hypatõ tonus est: et hypate hypaton ad parhypatẽ hypaton semitoniũ minus ẽ: parhypate vero hypatõ ad lichanõ hypaton tonus. ꝛ itidẽ per diffinitionẽ secũda diatessaron species ab hypate hypaton in hypaten meson reperiet. ꝛ tertia a parhypate hypaton in parhypaten meson. ¶ Species vero diapente hoc pacto per diffinitiones sumentur. Prima a proslãbanomeno in hypaten meson. Secunda a parhypate hypaten in lichanon meson. Tertia ab hypate meson in paramesen diezeugmenon. Et quarta a parhypate meson in triten diezeugmenon. ¶ Et septẽ species diapason cõsimiliter per diffinitiones querentur. Prima a proslãbanomeno in mesen. Secũda a parhypate hypaton in paramesen diezeugmenõ. Tertia a parhypate hypaton in triten diezeugmenon. Quarta a lichano hypaton in paranetẽ diezeugmenõ. Quinta ab hypate meson in neten diezeugmenõ. Sexta a parhypate meson in triten hyperboleõ. Septima vero a lichano meson in paranetẽ hyperboleõ. s3 hec cognitu facilia sunt: ĩspecta diligẽter supiore figura.

¶ Chromaticum principalium tetrachordum: constituere. 10

Proslambanomenos	A		A
Hypate hypaton	b	Tonus	b
Parhypate hypaton	c	Semi. minus	c
Lichanos hypaton	d	Apotome	d
Hypate meson	e	Trisemitonium	e

¶ Chromata apud Lachedemonios induxit olim Timotheus milesius molliorē cātum superiore diatonico: in quo canendi modo hic tetrachordū hypaton querimus. Sit ergo b c d e tetrachordū ad hypatas in chromatico melo ꝯstituendas assignatū. prepono chordam a: que sit proslābanomenos: quā facio sesquioctavam ad b hypaten hypaton primam tetrachordi cōstituendi chordam: deinde facio a sesqualterā ad e hypaten meson: eritq; ut in omnibus a ad b tonus/ et a ad e diapente. deinde facio b ad c semitoniū minus et b ad d tonum. erit ergo c ad d apotome. ꝛ q2 per decimā tertij dēpto a b tono ab a e cōsonantia diapente: relinquitur diatessaron. ergo b e modulabitur diatessaron. Sed cum per sextā tertij diatessaron ex duobus tonis et semitonio minore constet ꝛ b c et c d simul sint tonus: ergo d e continet tonum et semitoniū minus. est igitur d e trisemitoniū. Cum ergo b c hypate hypaton et parhypate hypaton sit semitoniū minus. ꝛ c d parhypate hypaton ꝛ lichanos hypaton sit semitoniū maius et d e lichanos hypaton ꝛ hypate meson trisemitoniū ut mōstratum est. constat ergo p̄ diffinitionē tetrachordū b c d e in gn̄e chromatico eē ꝯstitutū. idē enī trisemitoniū et trihemitoniū dicim⁹.

¶ Chromaticum tetrachordum meson: subiungere. 11

Proslambanomenos	A		A
Hypate hypaton	b	Tonus	b
Parhypate hypaton	c	Semi. minus	c
Lichanos hypaton	d	Apotome	d
Hypate meson	e	Trisemitoniū	e
Parhypate meson	f	Semi. minus	f
Lichanos meson	g	Apotome	g
Mese	h	Trisemitoniū	h

¶ Sint pro tetrachordo meson in gn̄e chromatico ꝯstituēdo e f g h: facio a ad h duplā et continētem diapason. ꝛ e ad f semitoniū minus ꝛ idē e ad g facio tonū. erit ḡ f ad g apotome. sed cū a ad e mōstrata sit ꝯsonātia diapēte. ea igitur substracta ab a h cōsonātia diapason: per vicesimāsecundā tertij relinquitur diatessarō. Est ergo e ad h hypate meson ad mesen diatessaron. ꝛ cum diatessaron duos tonos et semitoniū minus īpleat: ꝛ e g sit tonus ergo g h cōtinet tonum et semitoniū minus. erit ergo g h trisemitoniū. erit igitur e f g h ex duobus semitonijs e f ꝛ f g: et trisemitonio g h constitutum in genere chromatico tetrachordum. quod erat monstrādum.

¶ Reliqua duo tetrachorda: in eodem genere predictis adijcere. et in pētadecachordo consonantiam bis diapason collocare. 12

Proslambanomenos	A			A
Hypate hypaton	b	Tonus		b
Parhypate hypaton	c	Semi. min⁹		c
Lichanos hypaton	d	Apotome		d
Hypate meson	e	Trisemitoniū		e
Parhypate meson	f	Semi. minus		f
Lichanos meson	g	Apotome		g
Mese	h	Trisemitoniū		h
Paramese diezeugmenon	k	Tonus	Trite syn. Semi. minus	k
Trite diezeugmenon	l	Semi. mi.	Paranete syn. Apotome	l
Paranete diezeugmenon	m	Apotome	Nete syn. Trisemitoniū	m
Nete diezeugmenon	n	Trisemitoniū		n
Trite hyperboleon	o	Semi. minus		o
Paranete hyperboleon	p	Apotome		p
Nete hyperboleon	q	Trisemitoniū		q

Sint pro reliquis tetrachordis complendis k l m n o p q: quia tetrachordum meson disiunctum est a tetrachordo netarum diezeugmenon: iccirco facio meses ad paramesen diezeugmenon distantiā esse tonum. et mesen ad neten diezeugmenon facio consonare diapente. et ad netē hyperboleon diapason et tetrachordū k l m n partior vt tetrachordū hypaton. tetrachordūm vero n o p q partior vt in precedenti tetrachordū meson eritque vtrūque in genere chromatico diuisum. et quia a ad h cognita est esse diapason: et h ad q itidem diapason. ergo a ad q consonat bis diapason. Quom cum quindecim vocibus atque chordis contētum sit: constat effectū esse id quod erat propositū. Sed si k l m facis tetrachordū synezeugmenon ipsum partiaris vt tetrachordū chromaticum meson. et facile factū intuebere ꝓpositū.

13 Chromatici pentedecachordi numeros assignare.

Proslambanomenos	A		2592	5971968	
Hypate hypaton	b	256	2304	5308416	Tonus
Parhypate hypaton	c	245	2187	5038848	Semi. minus
Lichanos hypaton	d		2048	4718592	Semi. maius
Hypate meson	e		1728	3981312	Trisemitoniū
Parhypate meson	f			3779136	Semi. minus
Lichanos meson	g			3538944	Semi. maius
Mese	h		1296	2985984	Trisemitoniū
Paramese diezeugmenō	k		1152	2654208	Tonus
Trite diezeugmenon	l			2519424	Semi. minus
Paranete diezeugmenō	m			2359296	Semi. maius
Nete diezeugmenon	n		964	2221056	Trisemitoniū
Trite hyperboleon	o			2108268	Semi. minus
Paranete hyperboleon	p			1974272	Semi. maius
Nete hyperboleon	q		648	1492992	Trisemitoniū

Sint b et c minimi numeri semitonij minoris per decimāoctauam secūdi huius reperti. quia b nonā parte caret: augeo b et c per nouem et veniāt b et c in secundo loco. quoniā igitur in secundo loco b nonam partē habet: eam augeo per octo et fiat d. tunc b ad d per septimā secundi arithmetices erit sesquioctauus. quare b d cōtinent tonum. et b et c per eādem est semitonium minus. ergo c d est apotome. Rursum quia b habet octauā adiicio eidem suam octauā et fiat a: eritque a ad b sesquioctauus atque tonus et quoniā a habet tertiam facio a ad e sesqualterū. et quia habet secūdam facio itidem a duplum ad h. Reperio item h habere nonam tertiā et secūdam. facio igitur h sesquioctauū ad k: sesqualterū ad n et duplū ad q. quo facto duco b secundi loci in a b c d e h k n q et veniant in tertio loco a b c d e h k n q. Deinde duco c d secundi loci in e secundi et veniant f g et in k et veniant l m et in n et veniant o p in tertio loco. eruntque per septimā et octauam secundi arithmetices numeri pētadecachordi chromatici in tertio loco assignati. Nam a b erit tonus et b c semitoniū minus et c d apotome. et quia a ad e est sesqualtera et e sunt numeri diapente. et a b numeri toni. dempto igitur a b tono relinquitur b e diatessaron et b c et c d simul sunt tonus. igitur per sextam tertij d e sunt trisemitoniū. Et a h est diapason et a e diapente. igitur e h est diatessaron. et per octauam secundi arithmetices e f et f g sunt semitoniū minus et apotome. igitur g h est trisemitonium et cōsimiliter monstrabis h k esse tonū k l et l m duo semitonia et m n trisemitoniū n o p duo semitonia et p q trisemitoniū. clarum igitur euadit propositum.

14 Modorum diatonici et chromatis parhypate parhypatis: paramese paramesio: atque trite tritis correspondent.

Nam in vtrisque generibus hypate ad parhypatas semitonij minoris obseruāt interuallū. et mese ad paramesas tonum. et trite ad tritas minus semitoniū. est igitur notum illas voculas in vtroque canendi modo sibiinuicē respōdere. et nō modo id verum sit: sed et hypate hypatis et mese mesis et nete netis correspōdent. Nam vtrobique proslābamenoni ad hypatas hypaton cōcinunt tonum. et ad hypatas meson diapente. ad mesas diapason. ad netas disiūctarum diapason ac diapente. et ad netas hyperboleon bis diapason. est ergo quod ꝓponebatur et amplius: facile cognitū.

¶ Pentadecachordum enarmonium constituere. 15

Proslambanomenos	A			A
Hypate hypaton	b	Tonus		b
Parhypate hypaton	c	diesis		c
Lichanos hypaton	d	diesis		d
Hypate meson	e	ditonus		e
Parhypate meson	f	diesis		f
Lichanos meson	g	diesis		g
Mese	h	ditonus		h
Paramese diezeugmenon	k	tonus	Trite syn. diesis	k
Trite diezeugmenon	l	diesis	Paranete syn. diesis	l
Paranete diezeugmenon	m	diesis	Nete syn. ditonus	m
Nete diezeugmenon	n	ditonus		n
Trite hyperboleon	o	diesis		o
Paranete hyperboleon	p	diesis		p
Nete hyperboleon	q	ditonus		q

¶ Huius cōpositio perfacilis est. facio enī vt in ceteris precedētibus a ad h interuallū toni. et a ad e diapēte. & b ad d facio semitoniū minus. et diuido chordā c in medio differētie b ad d erit ergo b ad c diesis tetrartemeria atq; quadripartialis pariter et c ad d diesis. seu per quartam secundi huius hec latior illa vero contractior neq; per tricesimāsecundam eiusdem semitoniū minus in duo equa certo constitutoq; numero diuidi potest. et a ad e diapente. substracto igitur a b tono relinquitur b ad e esse diatessaron. et cum diatessaron semitoniū minus & duos tonos cōplectatur: et b ad d sit semitonium minus: relinquit igitur d ad e esse ditonus. erit igitur b c d e hypates hypaton parhypates hypaton lichaniq; hypatō et hypates meson tetrachordū: per b c: c d: et d e diesim & diesim et ditonū procedēs p diffinitionē in enarmonico gñe diuisum. Similiter cōstituas e f g h tetrachordū meson faciēdo a ad h diapason. et e ad g semitoniū minus. & partiēdo mediā dīam per f ita vt e f et f g sint due dieses Nā ab a h cōsonantia diapason subducta a e cōsonantia diapēte: relinquit e h esse diatessarō. et cū e g sit semitoniū min⁹: igit g h erit ditonus. & cū e f et f g sunt due dieses & g h diton⁹. ꝗ hec tetrachordi partitio in genere enarmonico facta cōspicitur. Et facta h mese ad netē disiunctarum diapente: & ad neten hyperboleon diapason: et chorda mese a paramese tetrachordi disiunctarū tono disclusa: pertinde ac proslābanomeno ab hypate hypaton: partieris tetrachordum disiunctarū k l m n vt b c d e tetrachordū hypaton. et tetrachordum n o p q hyperboleon excellentiūq; vt e f g h tetrachordū meson. tetrachordū autem cōiunctarum h k l m partieris vt tetrachordū meson et id quoq; facile est.

¶ Pentadecachordi enarmonici: numeros colligere. 16

Proslambanomenos	A	13824		13824	
Hypate hypaton	b	12288	Tonus	12288	Tonus
Parhypate hypaton	c	11664	Semi mi.	11976	diesis
Lichanos hypaton	d	10368	Tonus	11664	diesis
Hypate meson	e	9216	Tonus	9216	ditonus
Parhypate meson	f	8748	Semi mi.	8982	diesis
Lichanos meson	g	7776	Tonus	8748	diesis
Mese	h	6912	Tonus	6912	ditonus
Paramese diezeugmenon	k	6144	Tonus	6144	Tonus
Trite diezeugmenon	l	5832	Semi mi.	5988	diesis
Paranete diezeugmenon	m	5184	Tonus	5832	diesis
Nete diezeugmenon	n	4608	Tonus	4608	ditonus
Trite hyperboleon	o	4374	Semi mi.	4491	diesis
Paranete hyperboleon	p	3888	Tonus	4374	diesis
Nete hyperboleon	q	3456	Tonus	3456	ditonus

¶ Sint numeri a b c d e f g h k l m n o p q in primo loco constituti numeri pētadecachordi diatonici per octauam huius reperti. pono iterum a b e h k n q in secūdo loco ⁊ in respōdentibus locis rursum in secundo loco transmuto ad d et f ad g ⁊ l ad m et o ad p. quibus ita in secundo loco dispositis: ex ipsis quidem in secundo loco capio differentiam b d ⁊ eius medietatem adiicio ad d et fiat c. similiter differentiā e g et medietatem addo ad g ⁊ fiat f. et differētiam k m ⁊ medietate differentie adiecta ad m fiat l. et differentiam n p ⁊ medietate adiecta ad p fiat o. dico a b c d e f g h k l m n o p q numeros secundo loco positos esse numeros pentadecachordi enarmonici. Nam a b erit tonus. b c et c d due dieses cōstituentes semitoniū minus b d. quod enī est b c in diatonico factum est b d in enarmonico et d e est ditonus. Nam quod est in diatonico c e est hic in enarmonico d e. at diatonice modulationis c e ditonus est. Nam cōtinens c d tonū et d e tonum. ⁊ hoc pacto reperiētur e f g due dieses ⁊ g h diton⁹. h k tonus: k l m due dieses: m n ditonus. n o p due dieses: p q ditonus Sunt itaqꝫ collecti numeri pentadecachordi enarmonici quēadmodum propositum fuerat. quod est propositum.

17 ¶ Modi diatonici parhypate hypaton: in enarmonica modulatione transit in lichanon: et parhypate meson in lichanon meson atqꝫ trite in paranetas.

¶ Id prospici statim promptū est. Nam in diatonico pētadecachordo a proslābanomeno ad hypatē hypaton incidit tonus. et ab hypate ad parhypaten hypaton semitoniū minus. in enarmonico vero a proslābanomeno ad hypaten hypaton similiter incidit tonus. et ab hypate ad lichanon hypaton semitoniū minus. diatonica igitur parhypate: in enarmonica modulatione permutatur: transitqꝫ in lichanon. et hoc pacto de reliquis ostēdatur. quod ⁊ facile sensu deprehēdetur: si in vtroqꝫ emodulādi genere ⁊ diatonico et enarmonico proslābanomeni ponantur equisoni. tunc enī manifestū erit huius lichanos: illius parhypatis esse equisonos: vnisonosqꝫ: pariter et huius paranetas: illius tritis esse equisonas.

18 ¶ Consentiunt in tribus modulationū generibus: proslambanomeni/ hypate principales/ hypate medie/ mese/ paramese/ nete/ cum disiuncte/ tum coniuncte/ atqꝫ excellētibus netis excellentes.

¶ Nam in tribus generibus per quartā/ quintam/ sextam/ septimā/ decimam/ vndecimā/ duodecimā et quintādecimam huius proslābanomeni ad hypatas hypaton sonant tonum. et iidem ad hypatas meson sonant diapente. ad mesas diapason. ad netas disiūctas sonant diapason ac diapēte. ad netas autem cōiunctas dempto tono sonarent diapason ac diatesseron. et ad netas excellētes: cōsonant vbilibet ꝓslambanomeni bis diapason. cōsentiunt igitur in tribus generibus que adducte sunt vocule. quod est propositum

19 ¶ Que chorde mobiles queue imobiles in pētadecachordis existant: inuestigare.

Proslambanomeni	A	Stabiles	
Hypate hypaton	b	Stabiles	
Parhypate hypaton	c	Instabiles	
Lichani hypaton	d	Instabiles	
Hypate meson	e	Stabiles	
Parhypate meson	f	Instabiles	
Lichani meson	g	Instabiles	
Mese	h	Stabiles	
Paramese diezeugmenon	k	Stabiles	Trite synezeugmenon. Instabiles
Trite diezeugmenon	l	Instabiles	Paranete synezeugmenon. Instabiles
Paranete diezeugmenon	m	Instabiles	Nete synezeugmenō. Stabiles
Nete diezeugmenon	n	Stabiles	
Trite hyperboleon	o	Instabiles	
Paranete hyperboleon	p	Instabiles	
Nete hyperboleon	q	Stabiles	

¶ Chordas stabiles imobilesqꝫ vocamus: que in omni pentadecachordorū diuisione: easdem seruant interualla: eandēqꝫ ad proslābanomenon habitudinem. Instabiles vero atqꝫ mobiles: que id nō seruant. sic ergo stabiles ac instabiles reperiemus. cum enim per precedentem in tribus generibus consentiant proslābanomeni: pricipales hypate: medie hypate: mese: paramese: nete tum synezeugmene tum diezeugmene ac hyperboles: et easdem vt ex demonstratis iam patet seruent interualla. erunt ergo proslambanomenos hypate hypaton: hypate meson: mese: paramese nete synezeugmenon: nete diezeugmenon: et nete hyperboleon: simpliciter immobiles atqꝫ firme. Sed cum decimaseptima huius monstrauerit parhypatas diatonice modulationis: in enarmonico melo transire

permutarī q in lichanas/ & tritas in paranetas: constat ergo reliquas a predictis esse mobiles: vt parhypaten hypaton/ lichanon hypaton/ parhypaten meson/ lichanon meson/ triten synezeugmenon/ paranetē synezeugmenon/ triten diezeugmenō/ paranetē diezeugmenon/ triten hyperboleon/ paranetē hyperboleō. Id tamen animaduerti dignū est q cum per decimāquartam huius parhypate/ & trite in diatonicis et chromaticis respōdeant/ similiaq possideāt interualla: eas nō vsq adeo (vt cetere sunt) esse instabiles. Et proinde parti mobiles/ partimq imobiles bono iure dici posse videntur.

¶ In tetrachordis diatonicis ab hypate hypaton primo limite consonantiarum: ad quartum vsq limitem ter diatessaron cōtinetur sed semel dumtaxat in stabilibus/ immobilibusq. Et ad quintū limitem idētidem ter diapente: semel in mobilibus/ semel partim variabilis/ et semel penitus inuariabilis atq firma. ad octauum vero septies consonabit diapason: ter in imobilibus/ et quater in mobilibus. 20

Hypate hyp. et consequentes suis locis.

	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p
		Semi.	Ton.	Ton.	Semi.	Ton.	Ton.	Ton.	Semi.	Ton.	Ton.	Semi.	Ton.	Ton.
Stabiles	b			e			h	i			m			p
Instabiles		c	d		f	g			k	l		n	o	

¶ Cum dicitur a primo limite ad quartū vsq limitē/ quintū/ ac octauum: primus limes nō excluditur sed quartū/ quintū/ ac octauū excludi itelligimus. Sint ergo b c d e f vsq ad p quattuor tetrachorda et b hypate hypaton/ cetere vero cōsequētes. Dico primo ab b vsq e ter cōtineri diatessaron: sed semel solū in imobilibus. Nam per quartā huius b ad c continet semitoniū minus et c ad d tonum et d ad e tonū. ergo b ad e cōsonat diatessaron: eritq b ad e prima diatessaron cōsonantia reperta. Et cum ostēsam sit c ad d et d ad e esse duos tonos et per quintā huius e ad f sit semitoniū minus: ergo c ad f consonat diatessaron. eritq c ad f secūda diatessaron. Item mōstratus est d ad e esse tonus et e ad f semitoniū minus: et per quintā huius f ad g est tonus. ergo d ad g est diatessaron/ eritq d ad g tertia diatessaron. Sed cū prima harū trium que est b ad e sit ab hypate hypaton ad hypaten meson: quas mōstrauit precedēs stabiles imobilesq: et secunda ab c in f parhypate hypaton in parhypaten meson: et tertia ab d in g lichano hypaton in lichanon meson. et parhipate & lichane monstrate sunt mobiles. constat ergo ab b ad e ter diatessaron sed semel dūtaxat in stabilibus/ imobilibusq cōtineri. ¶ Secūdo dico ab b hypate hypaton ad f vsq parhypaten meson: solū ter contineri diapente. Nam per decimātertiā diapente tribus tonis semitonioq minore constat. sed per quartā & quintā huius b ad f solum duos tonos & duo semitonia minora ꝯtinet: q duo semitonia mīora p 34. scdi minus vno tono: cōmate restituūt. q vt b ad f diapente cōsonantiā ꝯpleat: plena deest apotome. nō ꝯstituit ergo b ad f diapēte. Itē c ad g per quartā et quintā huius cōtinet tres tonos qui sunt c ad d: d ad e: & f ad g: et vnum semitoniū minus quod est e ad f. igitur per decimā tertiā c ad f ꝯsonat diapēte. eritq c ad g prima diapēte et per easdem d ad h continet tres tonos: qui sunt d ad e: f ad g: et g ad h: & semitonium minus e ad f. ergo d ad h cōsonat diapente: eritq d ad h secūda diapente. & ab e ad i per quartā et sextā cōsimiliter continētur tres toni et semitoniū minus. erit ergo e ad i tertia diapēte. ter igitur ab b vsq ad f continetur diapēte. sed cū prima sit ab c parhypate hypatō in g lichanō meson. et parhypatas & lichanos mōstrauerit decimanona huius esse mobiles. erit ergo c ad g prima diapēte in mobilibus constituta. & cum secunda sit ab d lichano principaliū in h mesen: lichanos autē mobilis sit/ et mese imobilis: secunda igitur diapēte partim variabilis existit. Et cū tertia sit ab e hypate meson ad i paramesen que per eandē decimānonam stabiles mōstrate sunt. erit igitur tertia diapēte omnino stabilis atq firma. ¶ Tertio dico ab b hypate hypaton vsq ad i paramesen septies cōtineri diapason: sed solū ter in imobilibus/ quater autē in mobilibus. Nam b ad i per quartā/ quintā et sextam huius cōtinet quinq tonos et duo semitonia minora. ergo per vicesimāprimā tertij b ad i cōsonat diapason/ eritq b ad i prima diapason. Et per idē c ad k: d ad l & e ad m: singule intercipiūt quinq tonos et duo semitonia minora erit ergo c ad k secūda diapason. et d ad l tertia. & e ad m quarta. sed per quartam/ quintā/ sextam atq septimā simul f ad n similiter continebit quinq tonos & duo semitonia minora. similiter et g ad o & h ad p. erit ergo quīta diapason f ad n. sexta g ad o. et septima h ad p. igitur ab b ad i vsq: cōtinetur septies diapason. atqui primam prebent hypate hypaton & paramese diezeugmenō. et quartam hypate meson & nete diezeugmenō. et septimā mese & nete hyperboleō. hypatas autem mesas paramesas et netas mōstrauit decimaoctaua imobiles atq stabiles. igitur inter illas septē diapason cōsonantias: diapason ter in imobilibus reperit. Sed secūdam prebent parhypate hypaton et trite diezeugmenō Tertiā lichanos hypaton et paranete diezeugmenō. Quintam parhypate meson & trite hyperboleō Sextā licanos meson et paranete hyperboleon sed decimanona parhypatas/ tritas/ lichanas & paranetas: mōstrauit esse mobiles. igitur inter illas septem cōsonantie diapason vices: quater in mobilib' mutabilibusq facta reperitur: quod est totum propositum. ¶ Q autem diuus Seuerinus sapientū latinorū disciplinas sectantiū primus: quē & in hoc opere quātum valem' imitamur suis disciplinis nō parum adiuti decimo tertio capite quarti sue musices species diapēte numerādo eas quattuor faciat: id introductorie factum putetur: vbi precisam nō curauit veritatē. sed cōmunem secutus illic est extimationē. quod facile ex eius superiori determinatione cognoscitur. hic autem nō introductionis sed exacte determinationis locus est.

21 ¶ Tessaradecachordi chromatici inter assignatos limites ter itidẽ diatessaron: solũ semel immobiliter. bis diapẽte: semel immobiliter/ semelq; partim mobiliter. septies aũt diapason: ter vt in diatonico gñe immobiliter/ quaterq; mobiliter cõtinet.

Semi.	Apo.	Trise.	Semi.	Apo.	Trise	Tonus	Semi.	Apo.	Trise.	Semi.	Apo.	Trise.
b			e			h	i			m		p
	c	d		f	g			k	l		n	o

¶ Tessaradecachordum ex quattuor tetrachordis cõstituit: iccirco sic nũcupatum: q; quattuordecim chordis/ neruis/ voculisue cõtineatur. dico enĩ primo quattuordecim chordarũ in genere chromatico cõtinue per litteras b|c|d|e|f|g|h|i|k|l|m|n|o|p| ab hypate hypaton dispositarũ a primo ad quartum vsq; limitem: ter cõtineri diatessaron solũ semel immobiliter. Nã per decimam b ad e cõcinit diatessaron. eritq; b ad e pma diatessaron. sed ꝛ quia per decimam c ad d est apotome et d ad e trisemitoniũ ergo c ad e cõtinet duos tonos. et per vndecimã e ad f est semitoniũ. ergo per sextam tertiã c ad f duos tonos et semitoniũ cõtinens: erit diatessaron. erit igitur c ad f secũda diatessaron. et quia rursus per vndecimam e ad f est semitonium minus et f ad g apotome: ergo e ad g tonus. sed d ad e monstratum est trisemitoniũ. ergo d ad g ꝯtinet duos tonos ꝛ semitoniũ: estq; d ad g tertia diatessaron. Et cũ pma b ad e sit ab hypate hypaton in hypaten meson per decimãoctauã fit ĩmobilit. secũda ꝟo c f/ et tertia d g: sunt a parhypate ꝛ lichano principalium: q̃ decimanona patefecit esse mobiles. cõstat ergo pmũ. ¶ Scđo dico solũ bis intra quintũ limitem cõtineri diapente. quia enĩ b ad e per ĩmediate mõstratũ est diatessaron. et e ad f/ et f ad g simul tonus. ergo p decimãtertiã tertiã b ad g cõcinit diapente. eritq; b ad g prima diapente. ea tñ sex vocibus ꝛ non quinq; explebit: proprietatem diapente nõ seruans. at c ad g non explebit diapente. Nã per modo mõstratũ ad diapẽte cõplementũ deerit b ad c semitoniũ minus. neq; c ad h. Nã per vndecimam huius g ad h cõtinet trisemitoniũ. at c g ad diapente cõplemẽtum solũ deerat semitonium minus: superat igitur c h consonãtiã diapente completo tono. neq; d h cõtinet diapente. Nam cũ c h superet consonãtiam diapente integro/ cõpletoq; tono: dempta ergo c d apotome relinquet d h superãs diapente cõsonãtiam semitonio minore. sed e ad i cõsonat diapẽte: est enĩ h ad i per duodecimam tonus. sed d ad h per ĩmediate mõstratum superat consonãtiam diapente semitonio minore. dẽpto ergo d e trisemitonio minore: relinqtur e h deficiens tono a diapẽte: addito igitur h i tono fiet diapente. est itaq; e ad i secũda diapẽte. Ab b igitur ad f quintũ limitem solum bis sumitur diapẽte. Et cũ prima diapente b g sit ab hypate hypaton ĩmobili ad lichanon meson partim mobilem: fit ergo primo partim mobiliter. At ꝟo cũ secũda e i sit ab hypate meson ad paramesen que mõstrate sunt immobiles: fit ergo secũdo modo immobiliter seruatq; secũdo modo diapẽte proprietas vt de quinto loco in quintum fiat locum. ¶ Tertio dico septies fieri diapason ter ĩmobiliter/ quater ꝟo mobiliter. Nam cũ b ad e per primam partem huius monstrata sit diatessaron: et per scđam e ad i diapente. ergo per vicesimã tertiã b ad i cõsonat diapason. erit itaq; b ad i prima diapason. Preterea quia c ad f fuit inuẽta secunda diatessaron: et f g est apotome g h trisemitoniũ: ergo f h duo sunt toni et h i tonus et i k semitoniũ. ergo f k diapẽte: et c f vt iã dictũ est diatessaron. cõcinit igitur c ad k diapason: eritq; c k secunda diapason. et eodẽ iure d l tertia diapason adiuuãte duodecima huius. et e m quarta. f n quinta. g o sexta. et h p septima. Sed ter fieri immobiliter et quater mobiliter eodẽ modo vt in vicesima monstratur.

22 ¶ In tetradecachordo enarmonico: inter assignatos limites ter diatessaron ꝛ septies diapason vt in precedẽtibus continetur. at semel dũtaxat diapente atq; immobiliter.

Die.	Die.	Dito.	Die.	Die.	Dito.	Tonus	Die.	Die.	Dito.	Die.	Die.	Dito.
b			e			h	i			m		p
	c	d		f	g			k	l		n	o

¶ Tetradecachordum ꝛ tessaradecachordum idẽ dicimus. sit igit b|c|d|e|f|g|h|i|k|l|m|n|o|p tessaradecachordũ enarmonicũ. dico pmo inter b e ter cõtineri diatessaron. Nã quia per decimãquitam huius b c d sũt due dieses tetrartemerie: erit b d semitoniũ minus. et d e est ditonus. erit igit b e pma diatessaron. et eodem iure c f secũda. et d g tertia. et quia b e sunt hypate hypaton ꝛ hypate meson: fit igitur prima immobiliter. et c d sunt parhypate hypaton ꝛ lichanos hypaton mobiles. fit igit et duobus modis mobiliter. ¶ Scđo dico solũ semel a primo ad quintum limitem fieri diapente: et id quidẽ immobiliter. nam non fiet diapente b f quia solã supaddit consonãtie diatessaron b e diesim tetrartemeriam. neq; b g quia solũ supaddit consonantie diatessaron duas dieses que sunt semitoniũ minus. neq; fiet b h quia cõsonãtie diatessaron supaddit semitonium minus ꝛ duos tonos. neq; per idem fiet diapente c g aut c h. nam hic abundabit tonus ꝛ diesis: illic aũt deerit tonus minꝰ vna diesi. neq; d g. nam deerit tonus. neq; d h. nam tonus abundabit. at ꝟo cũ e h sit diatessaron: nã e f g due dieses/ ꝛ g h ditonus/ et cũ h i sit tonus: erit igitur e i diapẽte. et cũ e sit hypate meson et i paramese q̃ monstrate sunt immobiles. fit igitur inter assignatos limites solũ semel diapẽte atq; immobilit. Tertio septies fieri diapason vt in diatonicis ex decimaquinta declarat quẽadmodum vicesima huius mõstrata est.

23 ¶ Diatonice modulationis: septem modos ordine collocare.

				A b c d e f g h i k l m n o p	
R	Hypodorius				p 7 dis
S	Hypophrygi9	Tonus			p to
T	Hypolydius	Semito.	A		p nt
V	Dorius	Tonus	A		p cl
X	Phrygius	Tonus	A		p mo
Y	Lydius	Semitonium	A		di
Z	Myxolydius	Tonus	A		
				A b c d e f g h i k l m n o p	

Sit a b c d vsq ad p pentadecachordum diatonicum. sit r ꝓ hypodorio pentadecachordum diatonicum a b c d e f g h i k l m n o p grauissimū: qđ vt aliorum basis atq fundamētum statuatur: extendo vno tono in acumen proslambanomenon pentadecachordi s amplius q̄ sit proslambanomenos r ad quem ceteras voces suo ordine per quartā/quintā et sextam huius in diatonico modulādi genere subiūgo. eritq pentadecachordum s per diffinitionem hypophrygij modi. similiter extēdo proslambanomenon pentadecachordi t semitonio āplius q̄ tensus sit proslābanomenos pētadecachordi s cui tetrachorda per quartā/quintā/ et sextam huius vt prius coapto. eritq per diffinitiōem t pentadecachordū hypolydij modi. et proslābanomenon v vno tono extēdo amplius q̄ hypolydij: cui ceteras voces suo ordine sequētes in diatonico genere coapto. eritq cōcentus pētadecachordi v per diffinitionem dorius. et si amplius extēdo x vno tono: erit pentadecachordi x cantus phrygius. et si y semitonio maiore: erit eius concētus lydius. Et z amplius extenso vno tono: fiet concentus myxolydius. sicq factū per diffinitiōes patebit propositum.

24 Que diuersorū modorum in aliquo genere fuerit p̄me vocis ad primā habitudo: ea erit secunde ad secundam et tertie ad tertiam et cuiuslibet totius ad totam similis/ eademq habitudo.

		A	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	
R	Hypodorius																
S	Hypophrygius																
			q	r	s	t	v	x	A	b	c	d	e	f	g	h	i

Sit a/b/c/d ad p vsq pentadecachordum hypodorij in aliquo gn̄e vt diatonico: et q/r/s et sequētes pentadecachordū hypophrygiū. distabitq iccirco q proslambanomenos hypophrygij ab a proslābanomeno hypodorij modi acutior vno tono. dico ergo singulas hypophrygij: singulis hypodorij vt hypatas hypatis/parhypatas parhypatis/lichanas lichanis et ita consequētes: similiter tono/ tonicq proportione distare. Nam cū pentadecachordum a p et pentadecachordum q g sint vtraq a proslābanomeno in neten hyperboleon diatonice extēsa: ergo que ꝓportio a ad b ea est per quartā huius q ad r: ergo per tertiam secundi Arithmetices permutatim vt a ad q ita b ad r. at a ad q mōstratus est esse tonus: igitur et b ad r tonus. et cōsimiliter de sequentibus ostendatur.

Totus ordo diatonicus pētadecachordi hypophrygij modi: totum hypodorium vnius acumine toni superat: et totus hypolydius eūdem trisemitonio. singule quoq dorij singulas hypodorij diatessaron consonantia. totus vero phrygius consonantia diapente. lydius aūt diapēte atq semitonio. et myxolydius diapēte atq sesquitono. 25

				A b c d e f g h i k l m n o p	
R	Hypodorius				p 7 dis
S	Hypophrygi9	Tonus			p to
T	Hypolydius	Semito.	A		p nt
V	Dorius	Tonus	A		p cl
X	Phrygius	Tonus	A		p mo
Y	Lydius	Semitonium	A		di.
Z	Myxolydius	Tonus	A		
				A b c d e f g h i k l m n o p	

Nā proslambanomenos hypophrygij tono superat acumine proslambanomenon hypodorij. ergo per precedētem totus hypophrygius ordo totū hypodorium ordinem: toni superat acumine. et quia proslambanomenos hypolydij superat acumine semitonij minoris hypophrygiū: ergo idem superat acumine proslambanomenon hypodoriū trisemitonio. igitur per precedētem totus hypolydius ordo totū hypodoriū ordinē trisemitonio superauit acutior. sed et q: dorius toni acutie vincit hypolydiū: ergo dorius duobus tonis et semitonio acutior est hypodorio. ergo per sextā tertij eo acutior est cōso-

nantia diatessaron. quare per precedentem singule dorii singulis hypodoriis diatessaron consonantia sonant acutiores. et phrygius addit tonum in acumine dorio: igitur totus phrygius toto hypodorio diapente cōsonātia modulatur acutior. et lydius phrygio addit semitoniū minus et myxolydius lydio tonum. igitur lydius hypodorio diapente et semitonio et myxolydius diapente et sesquitono sonabit acutior. quod totum est propositum.

26 ℭ Hypolydius diatonicus hypophrygium diatonicum semitonio / et dorius trisemitonio / phrygius diatessaron / lydius diatessaron et semitonio / myxolydius diatessaron consonātia / atq̄ sesquitono supereuadit acutior: et dorius hypolydio tono / phrygius ditono / lydius diatessaron et myxolydius diapente: phrygius autem ad dorium sonat tonum lydius trisemitonium et myxolydius diatessaron / lydius phrygio semitonium et myxolydius sesquitonum: myxolydius autem lydio tonum.

ℭ Hec ut precedens vel q̄ facillime monstrabitur.

27 ℭ Septem modos chromatice modulationis constituere.

			A b c d e f g h i k l m n o p	
R	Hypodorius			p 7
S	Hypophrygius	Tonus		p Chro
T	Hypolydius	Semito.	A	p ma
V	Dorius	Apotome	A	p tici
X	Phrygius	Trisemitoniū	A	p mo
Y	Lydius	Semitonium	A	di
Z	Myxolydius	Apotome	A	
			A b c d e f g h i k l m n o p	

ℭ Facio r pentadecachordum chromaticū per decimam / undecimam / et duodecimam huius et similiter sex alia scz s / t / v / x / y / z: facioq̄ pentadecachordum s tono acutius r. et t pētadecachordum semitonio acutius s. v vero apotomes interuallo acutius t. et x trisemitonio amplius q̄ v. y semitonio amplius q̄ x. et z apotome trāscēdere y: dico ergo septem modos chromatice modulatiōis esse ordinatos. nam r erit hypodorius s p diffinitiōem hypophrygius chromaticus. t hypolydius. v dorius. x phrygius. y lydius. z myxolydius.

28 ℭ Quo pacto singuli cuilibet inter se chromatici modi respōdeant: ostendere.

ℭ Distat p precedētē hypophrygius ab hypodorio chromatico tono. et hypolydius ab hypophrygio semitonio. distat igitur hypolydius ab hypodorio acutior trisemitonio. et dorius ab hypolydio distat apotome. igitur dorius ab hypodorio remotus est ditono. phrygius aūt ab dorio trisemitonio. igitur phrygius ab hypodorio remouet tribus tonis et semitonio: hoc est totius consonātie diapente interual lo. et lydius a phrygio semitonio. igitur lydius ab hypodorio diapēte atq̄ semitonio. myxolydius ab lydio distat apotome. igitur myxolydius ab hypodorio diapente consonātia distat acutior atq̄ tono. Et hoc pacto de reliqs ex precedēte pfacilis ē ostēsio. ut hypolydius ab hypophrygio distat semitonio. dorius tono. phrygius diatessaron. lydius diatessaron et semitonio myxolydius diapēte. dorius a phrygio distat apotome. phrygius ditono. lydius diatessaron. myxolydius tritono. Phrygius a dorio trisemitonio. lydius tono et duobus semitonijs minoribus. myxolydius dō diatessaron. Lydius a phrygio semitonio et myxolydius tono. distat autē myxolydius ut iā quoq̄ dictū est a lydio maiore semitonio. sicq̄ constructum est propositum.

29 ℭ Septem itidem enarmonicos modos ordinare.

			A b c d e f g h i k l m n o p	
R	Hypodorius			p 7
S	Hypophrygius	Tonus		p Enar
T	Hypolydius	Diesis	A	p mo
V	Dorius	Diesis	A	p ni
X	Phrygius	Ditonus	A	p ci
Y	Lydius	Diesis	A	mo
Z	Myxolydius	Diesis	A	di.
			A b c d e f g h i k l m n o p	

ℭ Sint r / s / t / v / x / y / z septem pētadecachorda: et sit per decimāquintam huius r pentadecachordum enarmonicum: intendo proslambanomenon pentadecachordi s uno tono amplius pētadecachordo r. et t diesi amplius q̄ s. et v diesi amplius q̄ t. et x ditono amplius q̄ v. et y amplius diesi x. et z amplius iterum diesi q̄ y. erūt ergo sm acumen intensa sex post primum pentadecachorda: primo tono. deinde duabus diesibus et ditono. demum duabus diesibus: qui quidē intendēdi modus enarmonice modu

lationi peculiaris ꝓpriusq̧ habetur. sunt igitur septem pẽtadecachorda r/s/t/v/x/y/z: septem enarmonice modulationis modos continẽtia. quod demonstrari propositum erat.

¶ Singulorum enarmonicorum modorum: ad quelibet habitudines demonstrare. 30

¶ Huius ex precedẽti demõstratio clara esse potest. Primo hypophrygij ab hypodorio distantiã esse tonum. hypolydij tonum ꝛ diesim. dorij sesquitonum. phrygij diapente. lydij diapente ac diesi. myxolydij diapente ꝛ semitonio. Secũdo hypolydiũ distare ab hypophrygio diesi. doriũ semitonio. phrygium diatessaron. lydium diatessaron et diesi. myxolydium diatessaron ꝛ semitonio. Tertio doriũ ab hypolydio diesi. phrygium ditono ꝛ diesi. lydiũ diatessaron. myxolydium diatessaron ꝛ diesi. Quarto phrygium a dorio ditono. lydiũ ditono et diesi. myxolydium diatessaron. Quinto lydium a phrygio diesi. et myxolydium semitonio. Sexto myxolydium distare diesi a lydio. ¶ Septem enĩ modos ꝛ nõ plures adiecit priscorum autoritas pythagoricorũ. vt enĩ numerus a monade ad denariũ vsq̧ varius crescens ꝓgredit: mox eo sequens denarius vnitatis vicem obtinet primamq̧ explicat vnitatem eiusdẽ indiuidue monadis consors/ et emulus: q̄ ad centenariũ vsq̧ rursus nouenaria ꝓgressiõe se extendit: relapsus tãdem in tertiam vnitatem. Ita quoq̧ vocũ dissilitudo ac varietas ex quibus instar celestis harmonie concentus humani/ modiq̧ formãtur ad octonariũ vsq̧ surgit. sunt q̧ septem cõtinue voces inter se varie quibus succedens octonaria vocis plenitudo (Primus enĩ numeralis tubus primaq̧ tessera octonarius) ad primã rursus sonat vt eo dẽ: et ad eam sese habens perinde ac denarius ad vnitatem. Et hec octonaria series in cũi modulationis genere iterata procedit: vt cõtinue octauo quoq̧ loco octauũ per similem sibi ꝛ pene eundem sonus offendat sonum. ita vt ex duobus natiua quadam/ concordiaq̧ affinitate tam vnũ sonum ꝛ non multos parere videãtur: vsq̧ adeo enĩ se miscẽt/ et mutua se iungãt/ copulãtq̧ amicitia. Et harũ septem vocum q̄ grauissima tardissimaq̧ est: Saturno debetur. Prima Joui: tertia Marti. quarta Phebo. quinta Veneri. sexta Mercurio. septima eo eaꝝ acutissima/ cõcitatissimaq̧ Lune octaua aũt rursum reuoluit ad Saturnũ/ nona ad Jouem/ decima ad Martem. et hoc pacto ꝯsequẽtes: vt sapiens voluit antiquitas. Et reuera totius vniuersi harmonia septenario cõpleta est. et hec septem in celo celestem: in his aũt inferioribus corpoream/ sensibilẽq̧ tẽperãt harmoniam. sed hec magi plenius discutiãt. hinc licet cognoscere cur hypermyxolydius: septem pythagoricis modis haud multũ veniat accõmodãdus. Nã si in diatonico genere myxolydium pẽtadecachordũ ꝓ hypermyxolydio vno tono amplius acuat: totus is vbiq̧ modus ad hypodoriũ ꝯsonaret diapason/ octauusq̧ natus esset sonus: qui ad primũ idem/ congeneusq̧ naturali affinitate redditur. quare non ab hypodorio primo modo omnifariam varius putandus est. et eque si myxolydius intenderetur trisemitonio in chromate et ditono in enarmonio: sed de his forte ãplius q̄ presenti negocio par sit dictum est. Et modi quos adiecere recentiores vt diuus Gregorius ab hac modorũ antiquitate recedũt. et pleraq̧ alia q̄ posteriores musici inculcauerunt ꝛ que ab illis facile requiras. et nr̃a quoq̧ tempestate musicum modulamen/ atq̧ oẽm concinẽtiam ad celeritatem quãdã precipitẽq̧ leuitatem reducere conãtur: modestam grauem seriãq̧ ac decoram cõcentuũ moderatiõem perparũ attẽdẽtes. a moderatiõe enĩ dicti sunt modi. parũ item attẽdentes priscũ musices honestatis/ grauitatisq̧ decus: qua amentes arreptitiosq̧ soluebãt. sanitates inducebant feros hominum mores vt olim Thracius Orpheus/ ad mãsuetos ꝛ virtutis callem reuocabant. et ex sensibiliũ harmonia ad celestis harmonie desiderium captiuas aĩas tanq̄ sui iam memores exilij vbertim fluentibus oculis euocabant. hoc enĩ modorꝫ accõmoda mediocritate Pythagore discipuli faciebãt. non enĩ is inter hoĩes modestior: cuius oĩs incessus cursus videt. neq̧ is cuius preceps nimium loquela presentium ludit intelligentiam. Ita quoq̧ neq̧ ij modestiores modi: qui nimia sui festinantia q̄si in venerea chorea lasciuiẽtes prefugiũt auditum. Hac enim de causa Pythagorea schola molles chromatis modos repudiauit et Spartiate solẽni decreto Thimotheum Millesiũ increpuerũt vehemẽter diatonicos concẽtus potius approbãtes. qui si apte moderẽtur virtutis pre se ferunt modestiam. vt enĩ nimia tarditate ceu torpore quodã fastidimur inani. ita nimia celeritas molliciem quãdaz pre se fert inhonestam. medium enĩ neq̧ celeritate preceps nec ignaua tarditate pigrum: laudabile virtutisq̧ emulũ. quã oĩs etas ꝓbauit ꝓbaturaq̧ est: et ad quã musici modi tanq̄ moderationis animi quedã certe regule nos perducere debent: ꝛ ad diuina mentes nostras iugiter rapere. et felices ij erunt qui hoc fine et musicen et oẽm mundanam philosophiam quesierint. neq̧ talibꝰ deesse solet celestis fauor atq̧ presidium. qui autẽ secus faciunt miseri: quales nullos ad quos nostra hec modulationũ elementa ꝑuenerint futuros desideramus: quin eis oĩs harmonie vite decus: feliciter optamus/ nostriq̧ victuros memores.

¶ Quarti elementorum Musices Jacobi Stapulensis finis.

E

¶ Jacobus Faber Stapulẽsis Magnifico dño: Joanni Stephano Ferrerio designato Episcopo Uercellensi studiorum amantissimo.

b Is diebus metallicis formulis Arithmetices pariter atq Musices cõmissis clemẽtis: cogitanti michi dignissime presul quid illorum faciem prepararet intelligẽtiam: occurrit si introductio quedã ex diuina illa et Pythagorica diui Seuerini Boetij nũerorũ institutione in medium afferretur: que et vt domestica/familiarisq ante aliorũ lectiõem et tãta demonstrationũ põdera directrix haberet. Id enim ferme compotum est vt nisi mens rite preparata fuerit: nullum in disciplinis capiat emolumentum. Ut enim periti medici potiones/digerentiaq: fortibus pmittunt pharmacijs quo firmiorẽ inducant valitudinem: ita quoq in omni disciplinorũ genere operepretium est introductiones pmittere vt faciliorem assequamur discipline intelligẽtiam velut quãdam perfectam nẽc mẽdo sanitatem. Quapropter illico ex libris diui Seuerini Epitomen sum aggressus: cuius multiplex cõmoditas futura est. Ea enim assecuta: ad numerorum demonstratiões vt quibusdam Pythagore ritibus initiati preparatiq accedent atq illorum librorum prisca sapientia refertorum institutionis Arithmetices: perfacilem capessent intelligentiam. imo ex vltima comparationis diui Seuerini et Jordani formula vniuersam elegãtissime et nunq satis laudate numerorum institutionis cõmentationem consequẽtur facillime et ad quecunq: que numerorum desiderant operam: viam perfacilem atq aditum. Hanc ergo introductiunculam dignissime Presul non dubitaui nomini tuo designare: tametsi tue dignitatis habita ratione res sit exigua. Ut qui notum q feruidus dia studia complecteris/q in illis versaris assiduus schole ppe Socratice assertor: nullum preter sapientiam bonum esse/ nullum preter studia litterarum. Non potest ergo obseruantia in te mea in re litteraria grata non fore: qui facis litteras/litteratosq omnes obseruando: vt te debeant omnes obseruare littere. quod vtinam aliquãdo pro dignitate facere possim tue virtutis iam satis longa consuetudine probate: iugis/assiduusq cultor. Uale.

¶ Iacobi Fabri Stapulensis Epitome in duos libros Arithmeticos diui Seuerini Boecij ad Magnificum dnm: Joannem Stephanum Ferrerium Episcopum Vercellensem.

Inter disciplinas mathematicas quibus neglectis omnis obscuratur disciplina: tanq̃ ceterarũ parens/dux atq̃ domina: primum sibi vendicat Arithmetice locum que vt rite cognoscat quẽadmodũ et cetere certis eget adminiculis: inter que primo menti figenda est vniuersorũ circa que versatur subiecta formula/mox singulorũ diffinitiones/post quas numerorum affectiones/proprietatesq̃/post proprietates: quo ex loco vniuerse sunt monstrande.

¶ Formula vniuersorum circa que negociatur Arithmetica.

Numerus
  Secundum se 2.
  Ad aliquid 4.2.
  Scdm figurã 3.
Numerus scdm se
  Par 2.
  Impar 3.
Par
  Pariter par 4.
  Pariter impar 6.
  Impariter par 12.
  Perfectus 6.
  Diminutus 4.
  Abundans 12.
Impar
  Primus 3.
  Compositus 9.
  Ad alterũ pº 9.25.
Numerus ad aliq̃d
  Eq̃litas 10.10.
  Ineq̃litas 10.5.
Inequalitas
  maior ineq̃. 10.5.
  mior ineq̃l. 5.10.
Maior inequalitas
  Multiplex 2.1.
  Supp̃ticlaris 3.2.
  Suppartiẽs 5.3.
Multiplex
  duplus 2.1.
  Triplus 3.1.
  Quadruplº. 4.1.
  Quincuplus 5.1.
Superparticularis
  Sesqualter 3.2.
  Sesquitertiº 4.3.
  Sesq̃quartº 5.4.

  Sesquiquintus 6.5.
Superpartiens
  Superbipartiens 5.3.
  Supertripartiens 7.4.
  Superquadripartiens 9.5.
  Superquintupartiens 11.6.
  Supersextupartiens 13.7
Multiplex superparticularis
  Duplus sesqualter 5.2.
  Duplus sesquitertius 7.3.
  Duplus sesquiquartus 9.4.
  Triplus sesqualter 7.2.
  Triplus sesquitertius 10.3.
  Triplus sesquiquartus 13.4.
Multiplex superpartiens
  Duplus supbipartiens 8.3.
  Duplus suptripartiens 11.4.
  Duplus supq̃dripartiẽs 14.5.
  Triplus supbipartiens 11.3.
  Triplus suptripartiens 15.4.
  Triplus supq̃dripartiẽs 19.5.
Numerus scdm figuram
  Linearis 2.
  Planus 4.
  Solidus 8.
Planus
  Trigonus 3.
  Tetragonus 4.
  Pentagonus 5.
  Hexagonus 6.
  Heptagonus 7.
  Octogonus 8.
  Enneagonus 9.
  Decagonus 10.
  Endecagonus 11.
  Dodecagonus 12.
  Altera parte longior 6.

  Ante longior 15.
Solidus
  Pyramis 4.
  Cubus 8. latus 2.
Pyramis
  Trigona 4.
  Tetragona 5.
  Pentagona 6.
  Hexagona 7.
  Curta pyramis 29. Sui tetragoni sũt 16.9.4.
  Bis curta 25. Sui tetragoni sunt 16.9.
  Tricurta 41. Sui tetragoni sunt 25.16.
  Laterculus 18. Latera sunt 3.3.2.
  Asser 12. Latera sunt 2.2.3.
  Cuneus 24. Latera sunt 2.3.4.
  Nũerus circularis 25.
  Sphericus 125.
  Parallelepipedus 12. Latera sunt 2.3.2.
Medietas 6.4.2.
  Arithmetica 6.4.2.
  Geometrica 9.6.4.
  Musica 6.4.3.
Arithmetica
  Continua 6.4.2.
  Disiuncta 7.5.6.4.
Geometrica
  Continua 9.6.4.
  disiuncta 9.6.3.2.
  Quarta medie. 6.5.3.
  Quita medietas 5.4.2.
  Sexta 6.4.1.
  Septima 9.8.6.
  Octaua 9.7.5.
  Nona 7.6.4.
  Decima 8.5.3.

Numerus est multitudo ex vnitatibus aggregata.

n Numerus secundum se sumptus est numerus qui in comparatione ad alterum minime consideratur/neque vt ad figuras geometricas applicatur.

Numerus ad aliquid: est qui in comparatione ad alterum sumptus: consideratur.

Numerus secundum figuram dicitur: prout ad figuras geometricas applicatur.

Numerus par: est qui in duo equa diuidi potest.

Numerus impar: est qui in duo equa minime diuidi potest.

Numerus pariter par: est numerus par cuius partes in duo equa ad vnitatem vsque sectionem recipiunt.

Numerus pariter impar est numerus par cuius media: equalium partitionem non admittunt.

Numerus impariter par: est numerus par cuius media equaliū partiōem admittūt sed partium in duo equa partitio citra vnitatem deficit.

Numerus perfectus est numerus par: cuius omnes cōposite simulque accepte partes: sui totius summam implent. Pars est que aliquoties sumpta neque excrescēdo neque deficiendo suum totum metitur.

Numerus diminutus est cuius collecte partes: minus ipso toto reddunt. qui et imperfectus dicitur.

Numerus abundans: est cuius in vnum adiecte partes totius summam excedunt: qui et idem superfluus nuncupatur.

Numerus primus est numerus impar: qui sola vnitate metitur. et idem quoque incōpositus nominatur.

Numerus compositus est numerus: quem nō sola vnitas sed et alter numerus ipsum mensurat: qui et idem secundus appellatur.

Numerus solum ad alterū primus est numerus: qui secundum se compositus est: ad alterū vero comparatus sola cū illo cōmuni metitur vnitate. Par. impar.

Equalitas: est cum equalis numerus ad equalem comparatur.

Inequalitas vero est cum inequalis ad inequalem comparatur.

Maior inequalitas: est cum numerum maiorem ad minorem comparamus.

Minor vero inequalitas contra: quoties minorem maiori comparamus.

Numerus multiplex est cum maior nūerus minori comparatus: eūdem plusquam semel continet vt bis/ter/quater: et ita deinceps.

Vnitatem numerorum fontem/principiūque: etiam numeri appellatiōe censemus.

Duplus est cum maior numerus minori comporatus: minorem bis continet.

Triplus cum ter continet.

Quadruplus cum quater.

Quincuplus cū quinquies: et hoc pacto deinceps secundum naturalē nūerorum progressiōem.

Numerus superparticularis est cum maior numerus minori comparatus totum in se numerum minorem continet: et eius partem aliquam.

Sesqualter est numerus supparticularis cum maior totum cōtinet minorem: et eius medietatem. et idem dicitur hemiolius.

Sesquitertius est cum maior continet totum minorem: et eius tertiam partem. qui et dicitur epitritus.

Sesquiquartus est cū maior continet totum minorem: et eius quartam partem. Et si quintam cōtinet vocatur sesquiquintus. et ita deinceps secundum numerorum seriem.

Numerus supparticns est cū maior continet in se totū minorem: et eius insuper aliquot partes vt duas/tres/quattuor aut quotquot attulerit ipsa cōparatio. De his partibus id intelligitur: que minoris vnam partem non efficiunt.

Superbipartiens est cum maior continet minorem et duas eius partes.

Supertripartiens est cum tres eius partes insuper continet.

Superquadripartiens cum quattuor: et hoc pacto deinceps.

Numer⁹ multiplex supparticularis est quotiens maior numerus ad minorē ꝯparatus habet cum plusq; semel et eius partem aliquā.
Et si bis continet & eius medietatē vocatur duplus sesqualter.
Et si bis et terciam duplus sesquitertius.
Et si ter et medietatē triplus sesqualter & ita deinceps: ex vtriusq; denominatione multiplicis et supparticularis prout cōparatio attulerit noīa colligendo
Numerus multiplex suppartiens est quotiens maior numerus minori cōparatus minorem plusq; semel continet & insuper eius aliquot partes.& noīa sumit ꝯposita ex vtrasq; cōparationis denoīatione.vt hec: duplus superbipartiens/duplus supertripartiens/triplus/quadruplus/quincuplus supbipartiens et similia. Et quo pacto quinq; sumunt species cōparando maiorē numerum ad minorē eo pacto sumūtur quinq; correlatiue cōparato minore ad maiorē: quorum et suorū specialiū modorū speciesrūq; nomina: sola sub ꝑpositione addita effingimus: que sunt.submultiplex subsuperparticularis/subsuperpartiens/submultiplex subsupparticularis/submultiplex subsuperpartiens.et species submultiplicis sunt subduplus/subtriplus/subquadruplus/subquincuplus.et hoc pacto deinceps.
Species subsuperparticularis: subsesqualter/subsesquiterti⁹/subsesquiquartus/subsesquiquintus. et hoc pacto deinceps.
Species subsuperpartientis sunt subsuperbipartiens/subsupertripartiens/ subsuperquadripartiens.et huncin modum consequenter.
Species submultiplicis subsupparticularis subduplus subsesqualter/ subtriplus subsesqualter et similes.
Species submultiplicis subsuppartiētis sunt subduplus subsupbipartiēs subduplus subsupertripartiens atq; cetere similes secundum rationis/cōparationisq; naturā. sed hec statim nota sunt.
Numerus linearis est qui per plures in vnam/eandēq; partem adiectas: describitur vnitates.
Numerus planus est qui per suas vnitates descriptus: in longū atq; latum porrigit.
Numerus autē solidus est qui per suas vnitates descriptus longitudini et latitudini crassitiem superaddit/ trinoq; distenditur interuallo.
Trigonus est numerus planus: qui suis vnitatibus explicatus tria latera possidet equalia.
Tetragonus: quattuor equalibus angulis perficitur.
Pentagonus: quinq;.
Hexagonus sex.
Heptagonus septem.
Octogonus octo.
Ennagonus nouem.
Decagonus decem.
Endecagonus vndecim et hunc in modū deinceps: quos appellatione latina nuncupare possumus triāgulos/quadrāgulos/quinquāgulos/ sexangulos/ septangulos octangulos/nonāgulos/ decāgulos/vndecāgulos et hoc pacto cōsequenter.
Numerus altera parte longior est numerus planus qui per vnitates descriptus: longitudini latitudinē habet vnitate discrepātem. & idem longilaterus appellat.
Numerus vero antelongior: est qui per vnitates descriptus latera sua habet plusq; vnitate disiuncta. hoc est longitudinē latitudini plusq; vnitate dissentientē.
Pyramis est numerus solidus cuius singula latera sunt ab vno planorū ad vnum cacuminis verticē eleuata. Et planus nūerus a quo latera eriguntur: pyramidis basis nuncupat. Punctus autem/vnitasq; in quā conueniunt pyramidis conus/mucro/ vertexq; dicitur. que si ex base triangula nascitur: pyramis triangula nominatur. Si ex base quadrangula: pyramis tetragona.et hoc pacto deinceps.

l i

Perfecta pyramis ea est cuius laterũ advverticẽ erectio: citra vnitatẽ non desistat.
Curta vero pyramis ea est cuius laterũ erectio ad vnitatẽ vsq̧ nõ ascendit: cui si sola monas deest q̃ est prima pyramis: curta dicit̃. Si vnitas et planus vnus: biscurta. Si duo tricurta nominatur. et hoc pacto deinceps.
Cubus est nũerus solidus sex equis sup̃ficialibus/ planisq̧ numeris contentus: equã de se longitudini et latitudini altitudinẽ prebens. et idẽ numeri: tessere nũcupant̃ que duodecim equa latera semp̱ habent/ solidos angulos octo/ atq̧ sup̃ficies sex.
Laterculus is solidus est: qui longitudini latitudinem equam habens: altitudinem possidet contractiorem.
Asser: cuius cũ longitudo latitudini sit equa: altitudinẽ habet maiorem.
Cuneus vero qui longitudinẽ/ latitudinem/ et altitudinẽ in se cõtinet inequales
Circularis numerus est cũ latus in se ducitur et tetragonus inde nascens in idem terminatur. et rursum cũ idem latus in tetragonũ: nascitur cubus qui in idẽ reuoluit̃ et is cubus sphera/ sphericusq̧ cubus appellat̃. Et cum rursus quotiẽs idem latus in cubum vel si in infinitũ duxeris: qui inde nascitur numerus: in eiusdẽ lateris numerum terminat̃/ reuoluiturq̧.
Parallelepipedus solidus numerus est equidistãtibus sup̃ficialibus/ planisq̧ nũeris cõtentus neq̧ omnino quidẽ equalibus neq̧ omnino inequalibus.
Medietas est duaꝝ/ pluriũue proportionũ similis habitudo.
Medietas arithmetica est medietas: cuius termini equas seruant d̃rias.
Termini sunt numeri: medietatis proportiones constituentes.
Differentia est quo numerus numerum superat ac vincit.
Continua medietas arithmetica ea est que in tribus continue numeris continetur. Si vero in quattuor discõtinue cõtineat̃: disiũcta medietas arithmetica nũcupat̃.
Medietas geometrica est medietas cuius termini equas seruãt proportiones. Que si in tribus continue terminis cõtinetur: cõtinua. Sin vero in quattuor discõtinue: disiuncta nominatur.
Medietas harmonica ea est in qua quẽadmodum maximus terminus ad minimum ita differẽtia maiorum ad differentiã minorum sese habet.
Quarta medietas est in qua quẽadmodum maximus terminus ad minimũ: ita differentia minorum ad differentiam maiorum.
Quinta medietas in qua quẽadmodum medius ad minimũ: ita minorum differentia ad differentiam maiorum.
Sexta est in qua quẽadmodum maximus ad medium: ita minorũ differentia ad differentiam maiorum.
Septima vt quẽadmodum maximus ad minimũ: ita extremorum differẽtia ad differentiam minorum.
Octaua quemadmodum maximus ad minimum: sic eorum differentia ad differentiã maiorum.
Nona quẽadmodum medius ad minimum: sic extremorũ differentia ad differentiam minorum.
Decima quẽadmodum medius ad minimũ: ita extremorũ differentia ad differentiã maiorũ. Et he septem vltime presertim adiecte: quo Pythagore denarius impleat̃ in tribus terminis consistunt.

Nu me ri pro pri e ta tes.

Omnis numerus circum se proxime positorum atq̧ simul iunctorum comperitur medietas. 1
Omnis numerus duorũ quorũcunq̧ extrinsecus iacentium et ab eo equaliter distantium: iuidem est medietas. 2

Nu me ri pa ris pro pri e ta tes

1 Cum numerus par in duo partitur: si earum partium una par est et alterã parem esse necesse est.
2 Cum par itidem in duo partitur si earum partiũ una impar est: altera erit impar.
3 Par parem si multiplicet semper nascatur par.
4 Par imparem si multiplicet nascatur par.

Nu me ri im pa rio pro pri e ta tes.

1 Quilibet numerus impar in duo partitus: ut unam partem parem et alterã imparem habeat necesse est.
2 Impar imparẽ si multiplicet protinus nascitur impar.
3 Impar si multiplicet parem: procreabitur par.

Nu me ri pa ri ter pa ris pro pri e ta tes.

1 Quilibet numerus pariter par partem quãlibet et nomine et quãtitate parem habet. Nomine quidem quod denominationẽ habeat a numero pariter pare: quãtitate vero quod ea ipsa numerus sit pariter par.
2 Omnis numerus pariter par est aliquis dupliciũ ab uno continue sumptorum. Et quẽlibet duplorũ ab uno et solum talem: pariter parem esse necesse est.
3 Quotcũque pariter pares ab uno cõnumerata unitate collecti: sequẽtem minus uno restituũt
4 Omnis numerus pariter par est diminutus.
5 Omnis numerus pariter par: ex respondentibus sibi mutuo partibus procreatur. Partes mutuo sibi respondentes: pars denominãs/ et denominata.
9 Numerorũ pariter parium cõtinue dispositorum si series est impar: quod sub extremis cõtinetur equũ est ei qui continetur sub medio in se ducto. deinde sub circũpositis usque ad seriei expletionẽ. Si vero fuerit par: equum est ei qui sub duobus medijs cõtinetur. deinde his que altrinsecus illis adiunctũtur et hoc pacto usque ad seriei expletionẽ

Nu me ri pa ri ter im pa ris pro pri e ta tes.

1 Quilibet numerus pariter impar: medietatẽ habet imparem.
2 Omnis numerus pariter impar quãlibet sui partẽ alterius quãntitatis retinet/ pariter et denoiationis. Nã si quãtitas est par: denoiatio erit ipar/ et contra semper euenit.
3 Omnis numerus pariter impar gignitur ex imparibus continue ab unitate sumptis: in quos binarius ducitur.
4 Omnes numeri pariter impares sese quaternaria numerositate trãscendũt: quattuor naturali serie inexceptos cõtinue relinquẽtes/ et ab sese cõtinue quinto locos distãtes
5 Omnis numerus pariter impar: duorum simul pariter impariũ altrinsecus equidistãter iacentium et naturali serie collectorũ est medietas.
6 Omnium numerorum pariter impariũ pari/ cõtinuaque serie dispositorum: duas medietates simul iunctas suis proxime altrinsecis numeris et illis qui super illos sunt usque ad unitatẽ: simul/ in unũque collectis equari necesse est.

Nu me ri im pa ri ter pa ris pro pri e ta tes.

1 Omnis numerus impariter par aliquas eius partes habet et denominatione et quantitate respondentes: aliquas vero denominatione/ quãtitateque dissentientes.
2 Omnis numerus ipariter par ex numero pariter pari et pariter ipari procreatur.
3 Completa ad longitudinẽ et latitudinem impariter parium serie: qui per longitudinẽ descripti sunt: sextam pariter parium seruãt proprietatẽ. qui aũt in latitudine sextã seruant pariter imparium. Longitudo seriei est que a sinistro porrigitur in dextrũ. Latitudo vero que ab imo euadit ad sursum.

Nu me ri per fe cti pro pri e ta tes.

Omnis numerus pfectus alternatim altero senario/octonarioqꝫ terminatus cōperit. 1

Omnis numerus pfectus ex pariter paribus ab vnitate sua serie collectis nascit: qui 2
in vnum congesti/congregatiqꝫ:numeꝝ primum constituūt: in quē ducatur aggre=
gatorum maximus.

Nu me ri di mi nu ti et abun dan tis pro prie tates

Omnis numerus diminutus:a sola monade aut a numero diminuto numerat. 1

Numerus abundans: solum abundantem numerat. 2

Nu me ri pri mi et com po si ti pro pri e ta tes.

Omnis numerus primus ad omnē quem nō numerat primus est. 1

Omnis numerus compositus:a primo numeratur. 2

Omnis numerus ꝯpositus post aliquem imparīū naturali serie dispositoꝝ totus esse 3
probat: quotus numerꝰ ille ipar ab vnitate fuerit aut post aliquē supra ipm iparē
totorū:totus. Quotus/et totus:vt tertius/quītus/septimus ꝛ hoc pacto deīceps.

Omnis numerus primus aliquis imparīū est hoc pacto dispositoꝝ qui post nullum 4
imparē aut aliquem supra ipsum totorum:totus venerit quotus aliquis imparium
fuerit ab vnitate.

Nu me ri ad al te rum pri mi pro pri e ta tes.

Omnes numeri adinuicē primi singuli in se ducti:numeros adinuicē primos ꝑcreāt 1

Omnis numerus minor qui ad maiorē est primus a maiore detractus quotus potest 2
et eo qui relinquit quoties potest a minore detracto: ꝛ hoc pacto cōtinue quoties
opus est:tandē que detractionis vicem impediat:relinquit vnitas.

E qua li ta tis et ine qua li ta tis pro prie ta tes

Equalitas est inequalitatis principium. 1

Omnis inequalitas ex equalitate nascitur. 2

Omnis inequalitas in equalitatem resoluitur. 3

Mul ti pli cis pro pri e ta tes.

Multiplices ceteris inequalitatibus sunt antiquiores/origineqꝫ priores. 1

Omnis multiplex ex continua numeroꝝ serie ad vnitatem relata consurgit. Multi= 2
plex/ multiplicis modus atqꝫ species.

Omnis multiplex maiorem habet multiplicem. 3

Spe ci e rum mul tipli cis pro prie ta tes.

Omnes dupli ex singulis partibus a binario sumptis ad singulos seriei numerorum 1
ab vnitate continue comparatis : nascuntur.

Omnis triplus: a ternario duobus post singulū quēqꝫ triplum naturalis seriei nume= 2
rorum continue dimissis procreatur.

Quadruplus itidem continue tribus post singulū quemqꝫ quadruplū relictis nume= 3
ris nascitur. et hoc pacto de quincuplo/sescuplo ꝛ ceteris.

Su per par ti cu la ris pro prie ta tes.

Omnis supparticularis: supparticularem supra se relinquit minorem. Minorē enim 1
eam esse dicimus:cuius pars a maiori numero denominat.

Omnis supparticularis ex continua serie numerorum: continue proxime sequētis ad 2
suum precedentem comparati:sumit inicium.

Spe cie rum su per par ti cu la ris pro pri e ta tes.

Omnis sesqualter ex naturalibus/cōtinuisqꝫ triplo: ad naturales/ cōtinuosqꝫ duplos 1
comparatis enascitur.

Omnis sesquitertius pari pacto ex continuis quadruplis ad continuos triplos com= 2
paratis elicitur.

Omnes sesquiquarti ex continue quincuplis ad continuos quadruplos comparatis 3
simili origine extrahuntur. Et hoc pacto sesquiquinti ex sescuplis et quincuplis. et
sesquisexti ex septuplis et sescuplis ꝛ ita deinceps.

Su per par ti en tis pro pri e ta tes.

1 Omnis superpartiens maiorē supra se superpartientē relinquit. Maior ea est: que a maiore numero suam denominationē sumit.
2 Omnes superpartiētes ex continue a quinario imparibus ad numeros cōtinua serie ternario succedentes comparatis surgunt.

Spe ci e rum su per par ti en tis pro pri e ta tes

1 Continue superbipartientes nascentur si in vtrunq; terminū primi superbipartientis binarius ducitur et rursus in terminos producte superbipartientis et ita quoties in productos terminos ducetur binarius.
2 Continue supertripartientes simili creatione surgent si in terminos prime supertripartientis ternarius ducitur et in productos termios. ⁊ ita deinceps. Et superquadripartientes si in primos eiusdem inequalitatis terminos duxeris quaternariū. Et idem quoq; valuerit si aliū quēcunq; duxeris numerū. et simili creatione reliquas superpartiētis specierum formationes elicias.

Mul ti pli ciū su per par ti cu la riū pro prie ta tes

1 Multiplices superparticulares continue nascūtur ex imparibus suo ordine a quinario collectis continue numeris a binario succedentibus cōparatis.
2 Dupli sesqualteri continue creantur: si continuis a binario paribus: numeri a quinario sese continue quinario transilientes cōparabuntur.
3 Dupli sesquitertij itidem orientur: si perpetua serie a ternario surgentibus triplis: numeri a septenario sese continuo septenario excedentes cōparabuntur.
4 Dupli sesquiquarti nascentur: si a quaternario continue quadruplis: numeri a nouenario sese continue nouenario trāsilientes coaptabuntur/ cōparabunturq;. ⁊ hoc pacto sesquiquinti ex quincuplis et vndenariis ⁊ equem reliquis perfacilis est inuētio.

Mul ti pli ciū su per par tien tiū pro pri e ta tes

1 Dupli superbipartientes nascentur: si octonarius ternario/ et continue se octonario transgredientes continue se ternario excedentibus cōparabuntur.
2 Dupli supertripartientes certa lege nascentur: si ab vndenario et se continue eodem numero excedēteo quaternario et se quoq; indiscōtinuata serie iugiter quaternarij summa transilientibus: continue cōparabuntur.
3 Et dupli superquadripartiētes a decimoquarto et se eodem transgrediētibus et quinario eodēq; se excedēntibus reperiūtur. Et ita omniū hac industria facillima est inuentio. Et de triplis superbipartientibus/supertripartientibus et quibuslibet aliis hac arte facile series colligitur.

Nu me ri pla ni et so li di pro pri e ta tes.

1 Omnis numerus planus in triangulos est resolubilis.
2 Omnes figure plane sibi proxime adinuicē comparate vt tetragonus trigono et penthagonus tetragono ⁊ hoc pacto consequētes sese triangulo superant.
3 Omnis numerus solidus primordiū sui tenet pyramidem.

Spe ci e rum nu me ri pla ni pro pri e ta tes.

1 Omnes trigoni surgunt si disposita naturali numerorum quātitate: prioribus semper proxime sequens adiiciatur.
2 Tetragoni sunt omnes qui numeris naturaliter et in longum ⁊ in latum duplici serie dispositis et in seinuicē quolibet in quēlibet ductis: angulares reperiunt. Angulares dicuntur qui sursum a monade diametralē seriem ad angulum e regione oppositum complent.

Omnes tetragoni ex naturali serie ordinatis imparibus in vnam summã coacervatis 3
collectisq̃ nascuntur.
Omnis tetragonus ex duobus proximis quibusq̃ trigonis exurgit cõpositus. 4
Tetragoni:sumptis quarũcunq̃ ab vnitate continue similium habitudinũ numeris: 5
locis imparibus vno semper in medio intermisso sumuntur.
Omnes tetragoni vna medietate iunguntur. 6
Si tetragonus tetragonũ multiplicet:tetragonus prouenit. 7
Si vero tetragonus altera parte longiorẽ:nunq̃ proueniet tetragonus. 8
Penthagoni surgũt ex numeris naturali serie ab vnitate sequẽtibus:duorũ continuo 9
post penthagonũ facta infusione vna cũ priore vel priorib⁹ pẽthagonis collectis
Omnis penthagonus ex toto tetragono et proxime minori trigono cõponitur. 10
Hexagoni hoc pacto tribus in medio dimissis generãtur. 11
Omnis hexagonus ex trigono et proxime sequenti penthagono cõstituitur. 12
Heptagoni quattuor in medio hoc pacto dimissis numeris generantur. 13
Omnis heptagonus ex hexagono et proxime inferiori trigono constituitur. In crea 14
tione huius figure duo trigoni proxime minores debent eminus constitui.
Octogoni:quinq̃ gignuntur intermissis. 15
Omnis octogonus ex heptagono et proximo sub se trigono surgit cõpositus. Et hoc 16
pacto de ennagonis/ decagonis/ endecagonis/ dodecagonis continue vno plura
intermittendo sentiendũ est. et ex proximis minoribus figuris et trigonis proxime
sub illis minoribus instar aliorũ constituũtur. Quo fit vt omnes figure ex trigonis
consurgere et in eosdẽ resolui facillime deprehendãtur:quod cum ad Pythagoricã
tum ad nõnullorũ Platonicorũ intelligentiã nõ nichil presidij affert et momenti

Al te ra par te lon gi o ris pro pri e ta tes.

Altera parte lõgiores ex dispositis naturaliter paribus adinuicẽ coacervatis perinde 1
ac quadrati ex imparibus procreãtur omnes.
Omnis altera parte longior procreabitur si naturaliter ordinati pares :in naturaliter 2
dispositis imparibus singulatim ducantur.
Omnes longilateri/alteraq̃ parte longiores circũstant angulares quadratos duab⁹ 3
naturaliter numerorũ seriebus secũdm longum latũq̃ dispositis et in se inuicẽ ductis
Singuli altera parte longiores naturaliter dispositi singulis quadratis itidem dispo 4
sitis comparati: omnẽ numerorum partem gignunt/et procreant.
Singuli altera parte longiores naturaliter siti singulis tetragonis a secundo natura 5
liter ordinatis comparati:similiter omnes restituent superparticulares.
Altera parte longiores differẽtiis paribus perinde ac quadrati ĩparibus disiũgunt. 6
Altera parte longiores cõtinue in proximorũ quadratorum medio collocati: eãdem 7
proportionis habitudinẽ seruant. iterũq̃ a dupla proportione in omnẽ superpar=
ticularium speciem se porrigunt atq̃ diffundunt.
Omnis altera parte longior bis sumptus cum duobus altrinsecis quadratis coacer 8
uatus: quadratum efficit.
Proximi quiq̃ altera parte longiores cum duplo medij quadrati itidem tetragonũ 9
efficiunt.
Parte altera longiores duplati suis duobus altrĩsecis quadratis aggregati:quadra= 10
ta reddunt sed quos aliquis impar numeret.
Proximi altera parte lõgiores cum duplo medij quadrati itidẽ quadratos sed quos 11
numerus par numeret: efficiunt.
Altera parte longiores naturaliter ordinati:singuli singulis naturalem seriem seruã= 12
tibus quadratis copulati:continua serie triãgulares numeros cõstituunt.
Omnes altera parte longiores:continuo ex quadratis vno detracto latere nascunt̃. 13

14 Altera parte longiores continue alternatim quadratis interiecti: ad quadratos habitudinū similitudinē: non autem differentiarū seruant. Contra vero intercepti quadrati ad altera parte longiores relati: continue differentiarū equalitatē: non autē proportionū retinent/obseruantq; similitudinē

15 Alternatī constitutis altera parte longioribus atq; quadratis: a binario differētie duplantur et adinuicē eandē que ꝛ totorū est inter se: seruant habitudinē.

Py ra mi dis pro pri e ta tes

1 Omnis pyramis et aliqua numeroꝝ multangula figura: cui dēs congenee/similesq; figure superponātur: consurgit.

2 Cuiuslibet pyramidis basis est multangulorū numeroꝝ in pyramidis structurā aptatorum maximus

3 Pyramis trigona ex continue trigonis ad vnitatē vsq; supra seinuicē erectis gignit.

4 Et tetragona ex tetragonis et penthagona ex pēthagonis/ hexagona ex hexagonis hoc pacto supra seinuicē erectis et ita deinceps.

Cu bi pro pri e ta tes

1 Cubi producentur omnes si dispositis naturaliter post vnitatē imparibus duo primi coniūgantur. post quos alij tres. post quos quattuor. et hoc pacto consequēter.

2 Numeri cubi duabus eiusdē proportionis medietatibus iungūtur.

3 Si cubus cubum multiplicet: cubi forma conficitur.

4 Si cubus altera parte longiorē numeret: nunq̄ nascetur cubus.

Me di e ta tis A rith me ti ce pro pri e ta tes

1 Medietas arithmetica suoꝝ terminorū semper proportionū dissimilitudinē gerit

2 Medietas Arithmetice cōtinue nascetur si naturalis numeroꝝ series indiscōtinuata protrahatur. Similiter et numeris hoc modo digestis si simili intercapedine abinuicem distantes: continue accipiātur. Quo fit vt pares: naturaliter sese cōsequētes itidem et impares hanc medietatis normam inuiolabiliter seruent

3 Arithmetice medietatis coniuncte medius terminus extremorū simul iunctorum est medietas.

4 Arithmetice medietatis disiuncte extremi simul iuncti collectis/ coniunctisq; mediis coequantur.

5 Eiusdē medietatis vt termini ad seipsos: ita differentie ad differentias.

6 Medietas Arithmetica cōiuncta: sub extremitatibus minus continet eo numero qui ex medietate conficitur quantū possunt sub se due differentie que inter ipsos sunt terminos constitute.

7 Disiuncta vero tanto minus sub extremitatibus cōtinet eo qui cōtinetur sub mediis: quantum est quod fit ex differentiis maximi ad vnum mediorū in differentiā medij eiusdem ad minimum.

8 Huius medietatis quotcunq; cōtinue dispositoꝝ numerorū minores ꝓmini maiores proportiones: maiores vero: minores proportionū habitudines cōtinue seruāt.

9 Arithmetice medietatis determinatoꝝ extremorum medius reperitur numerus: si extremorum coniunctorū medietas accipitur.

Ge o me tri ce me di e ta tis pro pri e ta tes.

1 Geometrice medietatis quorūcunq; terminoꝝ continue dispositorum et maiorum et minorū terminoꝝ equales sunt proportionū habitudines.

2 Geometrica medietas suorū terminoꝝ conuersam seruat proportionalitatē vt semꝑ si primus ad secundū quēadmodū secundus ad tertiū: ita econuerso tertius ad scdz vt secundus ad primū quod ꝛ in disiūcta medietate siliter euenire cognoscit.

Eadem quoq3 medietas quattuor terminis distributa semper permutatã proportio= 3
nalitatem retinet. vt si quẽadmodum primus ad secundũ : sic tertius ad quartum.
ita vt primus ad tertium et secundus ad quartum.
Medietatis geometrice terminorũ et eorũdem differentiarum similis est proportio. 4
Medietatis geometrice que in multiplicibus existit: maior numerus ad minorẽ com 5
paratus: ipsum minorẽ suam habet differentiã/ aut multiplicẽ minoris/ vno minus
q̃ maioris ad minorem sit habitudo.
In continua medietate geometrica: quod continetur sub extremis/ equũ est ei qui ex 6
medio in se ducto nascit. Et in discõtinua ei q̃ fit ex duab⁹ in se ductis medietatib⁹
Commune proportionalitatũ species : quadrans ab vnitate ꝛ altera parte lõgioribus 7
alternatim vna serie dispositis: a prima multiplicũ medietate in omnes superparti
cularium habitudines/ proportionesq3 discurrunt.
Geometrice medietatis determinatis extremis medius proportionalis reperitur : si 8
numeri sub extremitatibus contenti tetragonicũ latus accipiatur.

Me di e ta tis har mo ni ce pro pri e ta tes

Medietas harmonica in maioribus terminis maiorẽ seruat proportionẽ 1
Musice medietatis medius terminus in collectas extremitates ductus: duplum nu= 2
mero qui fit ex extremo in extremũ producit.
Musice medietatis determinatis extremis : medius reperitur terminus si per extre= 3
morũ coniunctorꝫ numerũ: numerus qui ex differentia extremorũ in minimũ con=
surgit diuiditur/ isq3 qui ex diuisione relinquitur accipiatur atq3 minimo extremo
aggreget. diciturq3 is nũerus q̃ ex diuisione relinquit latitudo/ latitudinisq3 latus
Contingit ex harmonica medietate: primordiũ consonantiarũ consonãtiasq3 musicas 4
omnes elicere.

Re li qua rũ me di e ta tũ pro pri e ta tes

Si quarte medietatis extremi adinuicẽ sunt habitudinis duple: quod continetur sub 1
maximo et medio duplũ est ei qui continetur sub medio ꝛ minimo. Et omnino que
habitudo maximi ad minimũ . ea erit eius quod sub maximo et medio continetur
ad id quod continetur sub medio ꝛ minimo et id in omni medietate cõmune est
Si quinte medietatis medius ad minimũ sit duplus: quod cõtinetur sub maximo ter 2
minorũ et medio: duplũ erit ad id quod cõtinetur sub extremis. Et omnino q̃ habi
tudo medij ad minimũ: ea erit numeri qui fit ex maximo in medium et minimũ . et id
quoq3 omnibus publicũ atq3 cõmune est.

Diuus Seuerinus medietatũ denariã Pythagore plenitudinẽ impleuit : Jordan⁹
autẽ denario vnitatẽ adiecit.

Denarius medietatũ Boetij.		Undenarius medietatũ Jordani.	
Prima	1.2.3.	Prima	1.2.3.
Secunda	1.2.4.	Secunda	1.2.4.
Tertia	3.4.6.	Tertia	3.4.6.
Quarta	3.5.6.	Quarta	1.4.6.
Quinta	2.4.5.	Quinta	6.9.11.
Sexta	1.4.6.	Sexta	3.4.6.
Septima	6.8.9.	Septima	3.4.7.
Octaua	6.7.9.	Octaua	4.6.7.
Nona	4.6.7.	Nona	3.5.6.
Decima	3.5.8.	Decima	6.7.9.
		Undecima	6.8.9.

Formula proprietatũ ex Boetio reperiendarũ/ atq́ ex Jordano demonstrandarum.

¶Di uus Se ue ri nus Bo e ti us			¶Jor da nus.	
Numerorum proprietates.	Caput.	Liber.	Propositio.	Liber.
Numerus.				
1	7	1	2	1
2	7	1	2	1
Numerus par.				
1	5	1	2	7
2	5	1	2	7
3	46	2	10	7
4	46	2	12	7
Numerus impar.				
1	5	1	3	7
2	46	2	11	7
3			10	7
Numerus pariter par.				
1	9	1	31	7
2	9	1	29	7
3	9	1	32	7
4	9	1	54	7
5	9	1	25	4
6	9	1	26.40	2.7
Numerus pariter impar.				
1	10	1	33	7
2	10	1	34	7
3	10	1	35	7
4	10	1	35	7
5	10	1	2	1
6	10	1	3	1
Numerus impariter par.				
1	11	1	37	7
2	11	1	38	7
3	11	1	40	7
Numerus perfectus				
1	20	1	0	0
2	20	1	60	7
Numerus diminutus et abundãs				
1	0	0	55	7
2	0	0	55	7
Numerus primus et compositus				
1	0	0	1	3
2	0	0	2	3
3	17	1	25	7
4	17	1	25	7
Numerus ad alterum primus.				
1	17	1	12	3
2	18	1	15	3

Diuus Seuerinus Boetius Jordanus.

Numerorum proprietates.	Caput.	Liber.	Propositio.	Liber.
Equalitas/inequalitas.				
1	32	1	70	9
2	32	1	70	9
3	1	2	75	9
Multiplex.				
1	26.27.	1	38.70	9
2	23	1	37	9
3	23	1	52	9
Species multiplicis.				
1	23	1	38	9
2	23	1	38	9
3	23	1	38	9
Superparticularis.				
1	24	1	52	9
2	24	1	37	9
Species superparticularis.				
1	24	1	38	9
2	24	1	38	9
3	24	1	38	9
Superpartiens.				
1	28	1	52	9
2	28	1	42	9
Species superpartientis.				
1	28	1	7	2
2	28	1	7	2
Multiplex superparticularis				
1	29	1	43	9
2	29	1	7	2
3	29	1	7	2
4	29	1	7	2
Multiplices supartientes.				
1	31	1	7	2
2	31	1	7	2
3	31	1	7	2
Numerus planus.				
1	6	2	0	0
2	19	2	0	0
Numerus solidus.				
1	21	2	0	0
Species numeri plani.				
1	9	2	1	8
2	27	1	38	9
3	12	2	26	7
4	18	2	5	8
5	38	2	10	6
6	46	2	4	6

¶ Di uus Se ue ri nus Bo e ti us ¶ Jor da nus.

Numerorum proprietates.	Caput.	Liber.	Propositio.	Liber.
7	46	2	14	6
8	46	2	14.26	6
9	14	2	12	8
10	18	2	12	8
11	15	2	14	8
12	18	2	14	8
13	16	2	21	8
14	18	2	21	8
15	16	2	22	8
16	00	0	00	0
Parte altera longior.				
1	26	2	27	7
2	28	2	38	9
3	27	1	38	9
4	33	2	38	9
5	33	2	38	9
6	33	2	27	7
7	33	2	38	9
8	33	2	32	6
9	33	2	31	6
10	33	2	32	6
11	33	2	31	6
12	34	2	11	8
13	35	2	10.5	1.8
14	37	2	38.5.2.22	9.8.1.10
15	37	2	20	10
Pyramis.				
1	23	2	28	8
2	23	2	28	8
3	23	2	27	8
4	23	2	28	8
Cubus.				
1	39	2	28	7
2	46	2	4	6
3	46	2	16	6
4	46	2	17.26	6
Medietas arithmetica.				
1	43	2	1	10
2	43	2	0	0
3	43	2	2	1
4	43	2	3	1
5.	43	2	0	0
6	43	2	3	10
7	43	2	20	1
8	43	2	16	2
9	50	2	5	10

¶ Di nus Se ue ri nus Bo e ti us ¶ Jor da nus.

Numerorum proprietates.	Caput.	Liber.	Propositio.	Liber.
Medietas geometrica.				
1	43	2		
2	44	2	1	2
3	44	2	3	2
4	44	2	20	10
5	44	2	5	2
6	44	2	25.26	2
7	44	2	0	0
8	50	2	38	9
Medietas musica.				
1	45	2	34	10
2	47	2	37	10
3	50	2	40	10
4 ex musica	48	2	32	3
Quarta medietas.				
1	51	2	7	2
Quinta medietas.				
1	51	2	7	2

¶ Epitomes librorum Arithmeticorum Boetii finis.

¶ Jacobus Stapulensis Bernardo Ventario doctori medico numerorum amatori.

Onsiderasti mi Bernarde: oēs disciplinas ad quas generoso spiritu sit annitendum difficiles esse siquidem virtus oīs circa difficile versetur. verū hāc difficultatem nullos unq̄ absterrere: preter eos solos qui de re litteraria male meriti quod capere diffidant ceteris dissuadent: aut q̄ ipsis inuideant velut felicioribus/aut potius q̄ eos ipsos nescire pudibūdum sit. Ut scias q̄ procul presertum ab hoc p̄clarissimo Parhisiēsi studio liuor oīs absit/q̄ ignorātia pellat/ q̄q̄ probent Clitomachū Cartaginensem qui quadragesimū annum natus: primū studia litterarū petijt. in quibus adeo ꝓfecit ut Carneadi fuerit successor. quominus dubitādum est hūc locum: tutam eē disciplinarum stationem/securūq̄ portum: et undecunq̄ aduenerint benigno excipi fauore/ per amicoq̄ hospitio. Quapropter cum Arithmetice ꝛ Musice supioribus diebus in studentiū fauorem: huic loco tanq̄ asyllo cōmitterētur voluisti Rithmimachiā simul formari: ludum quidem numerorū non illiberalem/sed quem deceat studiosos adolescentes cognoscere ne nimiū tetrice videātur aduentasse discipline ꝛ quo interdum studio defessi primi earum Tyrones solent animum et cum utili ocio/tum honesto vires custodiāt incolumes. tale profecto consilium medicum decuit. Et si qui hanc ludi honestatem amabunt: gaudebunt tua opera post serias disciplinas hic esse insertum. Introducunt Alemeon mathematicus Pythagore discipulus: ꝛ Brōtinus ꝛ Bathillus eius temporis adolescentes. Uale.

Bathillus/Alcmeon/Brontinus.

Alchmeon q̄ tempestiuus ades. Alc. quid hoc o adolescẽtes. Bat. q̄m non nichil abs te ego ⁊ Brōtin⁹ perdiscere cupimus. Alc. quid nam id o Bathille. Bat. Priusq̄ in secentorum numero Pythagoram cōgrediamur: cupimus in rudibus aliq̄ntulū formari. Et cū iam e nocturno cōgressu redeunt Pythagore discipuli sciscitamur leuiora quedā que silenda non tradiderit. Atq̄ nosipsi iam Abacum atq̄ mensulam perdidicimus. nūc aūt ludum quendā querimus inter vos confictū: plerūq̄ vestras curas post seria studiis leuantem ⁊ quem vos ipi in numeris vt et pleraq̄ alia exercere soletis. Alc. Rithmimachiam o Bathille forsitan ītelligis. Bat. Eam ipsam Alcmeon. Alc. Dic age igitur Bathille quot numerorū simplices inequalitates. Bat. Tres: multiplex/supparticularis/ ⁊ superpartiens. Alc. Maioris scȝ habitudinis ad minorem. et in his tribus qualib⁹ omno cōsistit ludus a te ⁊ Brōtino nūc a me peritus. Quid maxima harmonia: et quid harmonia minor. Bat. Maxima harmonia est cū quattuor numerorū in geometrica medietate cōstitutorū: extremi ad vnū mediorū Arithmeticam/ ad alterū vō Musicam seruāt medietatē. Et harmonia minor solum in q̄ttuor terminis duas seruat medietates. Et quid medietas Arithmetica/ quid Geometrica/ et quid Musica vocet: dudum perdiscimus/ atq̄ satis q̄d sint nos ipi nobis tenere psuademus. Alc. Recte multa tenes o Bathille. atq̄ paulo latius hoc in loco noīe vtūtur maxime harmonie: vt ea ipā dicat quoties in quattuor terminis minoribus quidē maiores gradatim sequētibus: he tres reperiūtur ꝓportionū medietates. mox dispoūnt pmo duobus ordinibus multiplices ex quattuor primis paribus ortos atq̄ ab ipis denoīatos: duplos/ quadruplos/ sescuplos/ octuplos in leui/ planaq̄ area q̄ sit sexaginta q̄ttuor quadris spaciis dirempta alternis se intersecātibus lineis. post quos itidem duobus ordinibus cōsimiles supparticulares locant: sesqualteros/ sesquiquartos/ sesquisextos/ atq̄ sesquioctauos. dehinc cōsimilit̄ suppartientes illis quidē affines/ atq̄ cōgeneos: supbipartiētes/ supquadripartiētes/ supersextupartiētes/ atq̄ supoctupartiētes. et spacia illa campos vocant et ordinatos in ipsis numeros parium acierī. Et e regione in totidem campis/ singulis processu multiplices ordinant a quattuor pmis imparibus ductos atq̄ ab eisdem denoīatos: triplos/ quincuplos/ septuplos/ nōcuplos. post quos cōsiles supparticulares. post superparticulares cōsimilis affinitatis suppartiētes/ structeq̄ erūt e regione duobus ordinibus hic imparium/ illic vero parium acies hoc pacto

Acies Parium in Rithmimachia.

Duces superpartientium.			25	81	169	289			Calculi quadrā-
Comites suppartientium.			15	45	·91	153			tales.
Duces supparticularium.			9	25	49	81			Triquetri.
Comites supparticulariū.			6	20	42	72			Triquetri.
Duces multiplicium.			4	16	36	64			Rotundi.
Comites multiplicium.			2	4	6	8			Rotundi.
Primi campi prime arce.									
Primi campi secunde arce									
Comites multiplicium.			3	5	7	9			Calculi rotundi.
Duces multiplicium.			9	25	49	81			Rotundi.
Comites supparticulariū.			12	30	56	90			Triquetri.
Duces superparticulariū.			16	36	54	100			Triquetri.
Comites suppartientium.			28	66	120	190			Quadrātales.
Duces superpartientium.			49	121	225	361			Quadrātales.

Acies Imparium in Rithmimachia.

Bat. Satis hanc numerorum assituationem apphendo. Alc. Vbiq̄ consilium respōsus vt campi sibi inuicem subiecti duplos/ sesqualteros/ mox superbipartiētes tenent: et iterū sibi mutuo subiecti quadruplos/ hinc sesquiquartos/ atq̄ supquadripartiētes. Et hoc pacto de reliquis. Vtrīq̄ assignati numeri designatos sibi vendicant calculos eisdē numeris inscriptos: multiplices quidē rotūdos supparticulares trigonos/ suppartiētes tetragonos: excepto decimi noni loci parium numero qui tetragona Pyramis est sex pmis tetragonis orta: ⁊ hinc sex basium/ sexq̄ facierū Pyramis dicitur. Huic ergo numero mete Pyramidisq̄ formis debita est: que primos sex quadratos minoribus quidē maioribus suppositis habeat inscriptos. et hec pfecta Pyramis nūcupatur q̄ citra vnitatem eius Pyramidis mucro atq̄ vertex non deficiat. Cōsimili quoq̄ modo vicesimi loci imparium nūero imperfecte Pyramidis tetragonice forma debita est cui Pyramidi tres pmi tetragoni ad complementū desunt atq̄ iccirco tricurta dicitur et quia ex quinq̄ sequentibus tetragonis surgit: iccirco quinq̄ basium facierūq̄ eadem Pyramis nūcupatur. et illi quinq̄ tetragoni suis lateribus suo modo inscribūtur.

Bront. quid est Alcmeon q̃ calculos in officinis extornãtium multicolores sepenumero egoipse aspexerum. Alc. neq̃ absurde queris Broniline. hoc ad acierũ discrimen existimãt: sed duo colores michi satis esse videntur ut acies pariũ sit nigricans q̃ pares ad mundũ pertineant sensibilẽ. acies autem impariũ nivea sit et candicãs: q̃ impares masculi sint et individue semperq̃ eiusdẽ substantie exprimant similitudinẽ. Pyramides tamẽ ob excellentiã cum sue nature tum divinitatis quadratorũ substantie ex quorũ coacervatione surgunt coalescuntq̃ nobili quodã par est insignire colore. ut perfectã pyramida rubro et irricurtã ceruleo. Bat. Perfectiore colorem pyramidi parium tribuis q̃ ei que preside acie impariũ. Alc. Nec iniuria o Bathille nam et eadẽ impar est et in eius mucrone ac vertice summo residet divinitas. et latus sue basis infime: primus est a monade perfectus numerus/ et suarũ basium numerus eiusdẽ sue basis latus est/ numerusq̃ perfectus. et illa eadẽ sua basis primus est sensibiliũ/ tertiusq̃ mobiliũ circulus: vertiam ẽ in ordine circulorum tertius. primus enĩ simplicissimus est atq̃ plenissimus cuius centrum ubiq̃ est et circunferentia nusq̃. secundus est eternitatis horizon atq̃ supra tempus. tertius est horizon cui at cũ tempore indelesis vertigine revolutus. primus est nõre pyramidis sũmus mucro/ summusq̃ vertex. secũdus secũda basis. tertius prima/ infimaq̃ basis. Bat. Paradigmata fingis Alcmeon: ludum querimus non symbola. Alc. Recte ãmones Bathille. verum ego memetipm negligebã: et a suscepto officio deerrabam longius. colores ergo vestri arbitrij sunto. nam cũ et aliis usi fueritis nichil refert. verũ quod superest his paucis deprehẽdetis regulis: et quo in re parua modicus vobis satis sit sermo regularum Prima sit hec.

Calculi undecũq̃ in vacuos dimoveãtur cam. pes: tondi in scdm. trigoni in tertium. tetragoni cũ sua pyramide in quartum. Bat. Dimoveri in scdm intelligis forte in primũ campum. Alc. Ita volunt. est enim secundus a se sed post se primus. 1

Scda. Calculus ois quocũq̃ recto incessu calculum tollere potest: s3 angulari atq̃ obliquo nunq̃. 2

Tertia. Numerus numerum partis adverse et quãtitatis eiusdem suo recto cursu offendẽs: eũdem tollit. 3

Quarta. Si duo numeri eiusdẽ partis: numero partis adverse quẽ iuncti cõstituũt: circũponãtur: clausum auferũt. hinc fit ut ternarius et quinarius clausum octonariũ partis adverse tollant: et quaternarius et octonarius duodenariũ. et hoc pacto de similibus. 4

Quinta. Si inter duos adverse partis numeros vacui interiacẽtes campi per minorem numerum multiplicati maiorem efficiant: numerus tollit maior. hinc evenit ut binarius duodenariũ sex interiacentibus campis auferat: et sextum decimũ octo. et ternarius senariũ interiacẽtibus duobus/ et novenarium tribus: et quintumdenarium quinq̃. 5

Sexta. Quicũq̃ numerus. cui ut recto calle dimoveatur ois adempta est potestas: tollitur. 6

Septima. Si maxima pyramidis basis offenditur per numerum eãdem tollit: si offenditur: tollitur. 7

Octava. Si numerus per interceptos cãpos multiplicatus basin pyramidis maximam restituat eandem tollit. 8

Nona. Si alie bases pyramidem offendant cõsimilis in campis (si adest) auferat: et idem eveniat si numerus per intervalla multiplicatus aliquam illarum basium efficiat. si offendãtur: eedem tollãtur. 9

Decima. Victoria parta est si in adversis castris maxima constituitur harmonia. ãtem seu inferior ignobiliorq̃: si constituitur harmonia minor. 20

Undecima. Calculi acquisiti ad complendam harmoniam adverse parti auxiliares accipiũtur. 11

Duodecima. Cũ maxima harmonia paratur calculus ad complendam harmoniam acquisitus a suo loco non dimovetur. 12

Maxime	d	c	b	A				
Victorie	2	3	4	6	2.4.6 Medietas arith.	2.3.4.6 Geo.	2.3.6 har.	1
Pro acie	4	6	8	12	4.8.12 Medietas arith.	4.6.8.12 Geo.	4.6.12 har.	2
Parium	6	8	9	12	6.9.12 Medietas arith.	6.8.9.12 Geo.	6.8.12 har.	3
	4	6	9	12	6.9.12 Medietas arith.	4.6.9 Geo.	4.6.12 har.	4
	2	9	16	72	2.9.16 Medietas arith.	2.9.16.72 Geo.	9.16.72 har.	5
Maxime	3	5	15	25	5.15.25 Medietas arith.	3.5.15.25 Geo.	3.5.15 har.	1
Pro acie	5	9	45	81	9.45.81 Medietas arith.	5.9.45.81 Geo.	5.9.45. har.	2
Impariũ	5	25	45	225	5.25.45. Medietas arith.	5.25.45.225. Geo.	25.45.225. har.	3
Minores	5	15	25	45	5.25.45 Medietas arith.	5.15.45 Geometrica.		1
Victorie	12	15	16	20	12.16.20 Medietas arith.	12.15.16.20 Geometrica.		2

Prime maxime victorie
consonantie musice
A b diapente
B c diatessaron
A c diapason
A d diapason ac diapente
B ad diam c d bis diapason

Secunde maxime victorie
consonantie musice
A b diapente
B c diatessaron
A c diapason
A d diapason ac diapente
B ad diam c d bis diapason

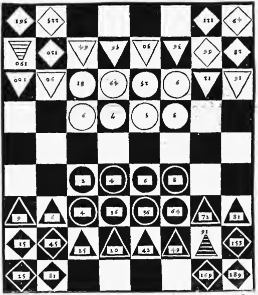
Tertie maxime victorie
consonantie musice
A b diatessaron
B c tonus consonantiarum principiũ.
A c diapente
A d diapason
A ad diam a c diapasõ ac diapẽte
C ad diam c d bis diapason

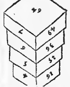
Minores victorias ꝑpaucas posuit: vt vos venatoribus similes relinquã: qui magis fere inuẽtione q̃ oblata sine venatione gaudere solent. Ex tribus tamen Bathille preceptis minorum victoriarum cognitio pendet.

Primum. Datos duos camporũ numeros iunge: & factorũ dimidium est inter eos in Arithmetica medietate medius numerus.

Secundum. Datis itidem duobus nũeris: duc primũ in scdm: et ꝓducti accipe latus tetragonicũ. et illud est eorum rationis geometrice medius numerus.

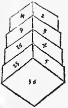
Tertium. Datos duos numeros aggrega: et qui aggregatus est serua. duc primũ in scdm/ et ꝓductum dupla/ et duplatũ diuide per seruatum aggregatũ: et qui ꝓuenit est illoꝝ numerorũ harmonice ꝓportiõalitatis medius. Et si hoc pacto quẽs dmodũ hec tria docẽt precepta integros numeros non repias: numeri dati nullos habebũt in illa rõne/ ꝓportiõalitateq; medios. et nõ modo minores victorias: seu sint ex Arithmetica et Geometrica/ seu ex Arithmetica et Harmonica/ seu ex Geometrica et Harmonica reperias: sed et si volueris maximas. Verũ solent o Bathille aliter cãpos/ acierũ duces/ comitesq; ordinare. vt area sit camporũ sexagintaquatuor. aut limite camporum medio aciem vtranq; dirimẽte superadiecto duorum atq; septuaginta.





Pyramidis summa.

Pyramidis summa.
91
1



Et campis hoc modo digestis rudes adhuc et quos ad mysteria ipse cetus silẽtium candidissimus pater nondum admittit ex superioribus preceptis inter se concertant. mox vo puerilibus actis/ iocisq; reiectis ad silentia hymnosq; assuefacti: presentia preceptoris tanq̃ numinis cuiusdã fruũtur/ solan

tur/ et vitam sine crimine transigunt innocuam/ labeq; carentem. hoc illis studium/ hoc solamen/ hec vigilantissima cura:

Ut sese totos rimentur ad vnguem
Ne quid hiet/ ne quis perturbet se angulus/ equis
Partibus vt coeat/ nil vt declinet amussis.
Nec prius in dulcem declinant lumina somnum:
Omnia q longi reputarint acta diei.
Quo pretergressi/ quid gestum in tempore/ quid non.
Offensi plauis: dant palmam et premia rectis.

¶ Tales candidi discipulos decet esse Pythagore. Ergo meum consilium est o Bathille et Brontine generosi adolescentes: vt tantisper ludo indulgeatis dum tenerior etas vos ad altiora conscēdere non sinit: dum tardat aditum. mox aūt plusculo robustiores animo facti: nostrum sīctium querite/ et vos nostro cetui comites asciscite: vitam semper que frugi sit querentes innocuam. et me potius magistro (aut si mauultis vobiscū condiscēte) doctrinam/ moresq; q iocos discite. vos aūt dū etas tenerinscula patitur: a iunioribus que petiti ludi sugsunt vel q facillime discetis/ nūcq; ambo recte valete. Bat. Nos q valemus/ q possumus o Alcmeon ego et Brōtinus: bonas p tue humanitatis officio habemus nunc/ habebimusq; semp gratias. et cognoscimus te preter dignitatem her minutula percōtatos esse. qd vero superest nobis facile vēdicabimus. atq; cu interim dū te ad seria magis erga nos vtemur preceptoris opera: nostri semper memor felicissimus valeto.

Rithmimachie Finis.

¶ Has duas Quadriuij partes et artium liberalium precipuas atq; duces cum quibusdam āminicularijs adiectis: curarunt vna formulis emendatissime mandari ad studiorum vtilitatem Joannes Higmanus/ et Uolgangus Hopilius suis grauissimis laboribus et impensis Parhisij Anno salutis domini: qui oīa in numero atq; harmonia formauit 1496 absolutiq; reddiderunt eodem anno: die vicesima secunda Julij/ suos labores vbicunq; valebunt semper studiosis deuouentes. Et idem quoq; facit Dauid Lauxius Brytannus Edinburgensis: vbiq; ex archetypo diligens operis recognitor.

Registrum presentis operis.

a b c d e f g h i
Omnes quaterni.

a
Primum: In hoc opere.
Secundum: Jordani Nemorarij.
Tertium: ¶ Sint a b c d e f.
Quartum: c in se.

b
Primum: ¶ Si duo numeri.
Secundum: simāquintam.
Tertium: nūerans qui et idem.
Quartum: ¶ Numerorum cōtinue.

c
Primum: ¶ Nam si.
Secundum: ¶ Quadratus cubicus.
Tertium: ¶ Si fuerint duo numeri.
Quartum: ¶ Si quotlibet.

d
Primum: q precedens.
Secundum: ¶ Si sumātur.
Tertium: parte longior.
Quartum: sequens tetragonum.

e
Primum: numeratar.
Secundum: ¶ Datam proportionem.
Tertium: ¶ Multiplicem.
Quartum: cum ex trina.

f
Primum. ¶ Jacobi.
Secundum: ¶ Jacobi.
Tertium: ¶ Si terminoꝝ.
Quartum: / B supparti.

g
Primum: interuallo e d
Secundum: pportiones esse.
Tertium: ¶ Jtidem ditonus.
Quartum: ¶ Differentia.

h
Primum: f ad g.
Secundum: ad q fiat p.
Tertium: ¶ Sint p reliquis.
Quartum: ¶ Sint numeri.

i
Primum: Numerus multiplex.
Secundum: Numeri paris.
Tertium: Suppartiētis.
Quartum: Altera parte.